

SERIES:

SET– MTI – MTGC-TSE

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Le système de numération est le système décimal.
 - a) Déterminer l'entier naturel : $N = \text{P.G.C.D}(17787 ; 689 ; 297)$
 - b) Résoudre l'équation : $\{(x ; y) \in \mathbb{Z}^2 : 13x - 84y = 7\}$
2. a) Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que ;

$$\begin{cases} a \times b = 0 \\ a - b = 5 \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 3x - 4 = 0$

c) Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n , on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

3. On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$. Calculer $A+B$ et $A-B$ puis A et B .

EXERCICE 2 : (5points)

1.a) Résoudre l'équation différentielle : $4y'' - 16y' + 17y = 0$

b) Déterminer la solution particulière f telle que : $f(\frac{\pi}{2}) = e^\pi$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = e^\pi$

2. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 6$, l'unité de longueur étant le centimètre.

a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A,5) ; (B,-3) ; (C,2)$.
Calculer : $GA^2 ; GB^2 ; GC^2$.

b) Développer : $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 ; (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 ; (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$. Démontrer l'égalité :
 $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 4MG^2 - 48$

c) Déterminer l'ensemble (\mathcal{E}) des points M du plan vérifiant la relation :
 $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$

Prouver que $A \in (\mathcal{E})$.

PROBLEME : (10points)**A**

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$X \longrightarrow e^{2x} - 2e^x$$

1. Vérifier que le tableau de variation de f est bien le suivant :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	0		0	$+\infty$

- Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.
- Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$
 - Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x .
 - Du signe de $g''(x)$, déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$.
 - Etudier la position de (C) par rapport à (T).
- Tracer (T) et (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

B

Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

et (C_n) la courbe représentative. Prouver que toutes courbes (C_n) passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

C

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par (\mathcal{C}) la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, i, j) d'unité graphique 2 cm.

- Calculer $h(0)$; $h(1)$, $h(2)$
 - Dresser le tableau de variation de h
 - Prouver que la courbe (\mathcal{C}) admet une asymptote dont on précisera l'équation.
 - Utiliser les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x .
- Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

- On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$. On note (Γ) sa courbe représentative de φ dans le repère précédent.

- Étudier le sens de variation de φ en précisant ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.
- Prouver que la courbe (Γ) admet une asymptote que l'on précisera.
- Etudier les positions relatives des courbes (\mathcal{C}) et (Γ) .
- Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe (\mathcal{C}) .

- Etablir que, pour tout réel x : $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t)dt$

- Donner une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.