EXERCICE 1 : (5 points)

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} \; - x\right)$

2. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

a) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(2x+1)^3}$

b) $g(x) = (4x^2-1)\,\sqrt{9-x^2}$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^3}\,dx$

c) $\int_1^2 \left(e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}\right) dx$

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) - 1$$

1. Dressez le tableau de variation de f .

2. a) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe (Cf) de f avec l'axe des abscisses, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur $\mathbb{R}$.

c) Expliciter la bijection réciproque.

<u>PROBLEME</u> : (10 points)

A

Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1. a) Prouver que $g'(x)$ est du signe de : x (1 + x) (1 – x) pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

 b) Dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation : $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [1 ; +**∞** **[**.

 c) Montrer que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. On note (**Γ**) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.
 a) Ecrire une équation de la tangente (**T**) à (**Γ**) au point d'abscisse 2 ; déterminer la valeur exacte de l'abscisse x_0 du point d'intersection de (**T**) et de l'axe x'ox. On note x_1 et x_2 respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès de x_0 à 10^{-3} près.

 b) Préciser le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.

B

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
Soit f l'application définie sur [0 ; +**∞** **[par** :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad si \ x \neq 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f.

1. Montrer que f est dérivable en 0. Étudier les variations de f.

2. Montrer que pour tout réel x tel que x > – 1, on a : ln (1 + x) ≤ x.

En déduire la position relative de (C) et de sa tangente en O. Tracer la courbe (C).