Exercice 1 : ……………………………………………(5 points)

On considère le polynôme P(x) défini sur ℝ par

$$P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 31x + 12$$

1-/ Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c que l'on déterminera tels que

$$P(x) = (3x-1)(ax^2 + bx + c)$$

2-/ Résoudre dans ℝ

a-/ P(x) = 0

b-/ $\ln 6 + \ln(x^3 - x^2 + 2) - \ln(11x^2 + 31x) = 0$

c-/ $6e^x - 17 - 31e^{-x} + 12e^{-2x} = 0$

3-/ Résoudre dans ℝ²

a-/ $\begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$; b-/ $\begin{cases} xy = e^2 \\ 3\log_x^y + 3\log_y^x = -10 \end{cases}$

Exercice 2 : ……………………………………………(5 points)

1-/ Calculer les intégrales suivantes

a-/ $\int_1^e \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) dx$ b-/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{\tan x}\right) dx$ c-/ $\int_{-1}^{1} \left| x^2 - 2 \right| dx$

2-/ Pour tout entier non nul n, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

a-/i-/ Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1 \,;\, e[$ et que pour tout entier naturel on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

ii-/ En déduire le sens de variation de la suite (I_n)

3-/ i-/ Calculer I_1.

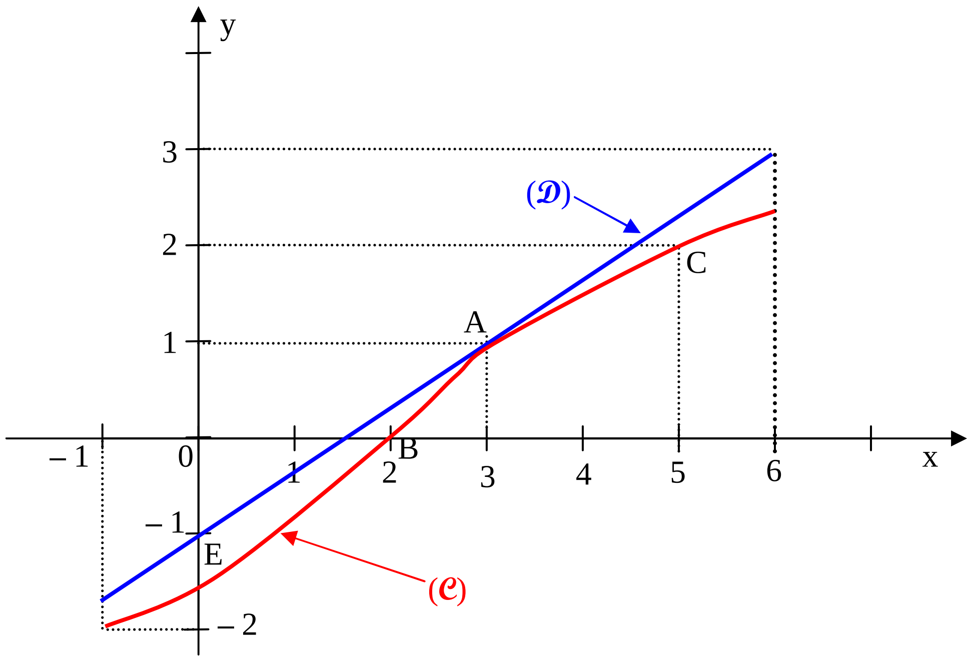
ii-/ Démontrer (en utilisant la méthode d'intégration par parties) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n$$

iii-/ En déduire I_2 ; I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

Problème : ………………………………………(10 points)

Soit f la fonction dérivable et strictement croissante sur [–1 ; 6] ; sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\,\vec{j})$ passe par B(2 ; 0) et C(5 ; 2) ; sa tangente(D) au point A(3 ; 1) passe par E(0 ; –1). Le graphique ci-dessous donné pourra être exploité dans tout l'exercice.



Partie I

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(f(x))$.

1-/ Déterminer l'ensemble I de définition de g.

2-/ Quel est le sens de variation de g sur I ? (justifier)

3-/ Résoudre dans I l'équation g(x) = 0.

4-/ Donner une valeur approchée de g(5) à 0,01 près.

5-/ Exprimer g'(x) en fonction de $f'(x)$ *et de* $f(x)$. En déduire la valeur de g'(5).

6-/ quelle est la limite de g en 2 ? Interpréter.

7-/ En utilisant tous les résultats précédents, donner, dans un repère orthonormal l'allure de la courbe (Γ) représentative de la fonction g ainsi que sa tangente au point d'abscisse 3.

Partie II

P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ) d'équation $x=\dfrac{1}{2}$.

1-/ Soit $\mathcal{C}$' = S ($\mathcal{C}$) (image de $\mathcal{C}$ par S).
Construire ($\mathcal{C}$') dans le même repère que ($\mathcal{C}$).

Soit g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction admettant ($\mathcal{C}$') comme courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. Vérifier que $g(x)=(x+1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ et préciser Dg, ensemble de définition de g.

2-/ Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=g(x)$.

Partie III

1-/ justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) < 1 < g(n)$.

En déduire l'encadrement suivant de e : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \text{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Préciser cet encadrement si n = 1.

Soit $\ell(n)$ la largeur de cet encadrement, c'est-à-dire que

$$\ell(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell(n)$ est minoré par $\dfrac{2}{n}$.

2-/ Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de **e** permet d'obtenir une valeur approchée de **e** à 10^{-3} près, c'est-à-dire que

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| \leq 10^{-3}.$$