EXERCICE 1 : (4 points)

1-/ soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

a-/ En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que
$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ (On pourra remarquer que $\sin^n x = \sin x . \sin^{n-1} x$)

b-/ Calculer I_0 ; En déduire I_2 et I_4.

2-/ Soit le polynôme P (z) = $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$ d'inconnue complexe z

a-/ Montrer que si Z_0 est une solution de l'équation P (z) =0 alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi solution de l'équation P (z) =0.

b-/ Calculer P ($-i$) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P (z)=0.

c-/ Ecrire chacune des solutions sous forme exponentielle.

EXERCICE 2 : (6 points)

1-/ soit la suite (U_n) définie sur N* par $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ **(1)**

a-/ Exprimer V_n en fonction de n et montrer (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1er terme et la raison.

b-/ Calculer $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots + V_n$.

c-/ Utiliser la relation **(1)** pour trouver une autre expression de S_n. En déduire U_n en fonction de n. calculer la limite de U_n.

2-/ Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.

Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne ;

- Le tirage d'une boule rouge ne rapporte rien
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50 F
- Chaque boule verte tirée rapporte 250 F ;

Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur :

a-/ de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0 F).

b-/ de perdre 50F ?

c-/ de gagner 50F ?

d-/ de gagner 250F ?

NB : Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

PROBLÈME : (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\ (x) = (x+2)e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1-/ Déterminer la limite de $f\,(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces résultats.

2-/ a-/ Etablir que pour tout réel x $f\,'(x) = -\,(x+1)e^{-x}$, en déduire le signe de $f\,'(x)$ puis le tableau de variation de f .

b-/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse x = 0.

c-/ Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ (Unité 2 cm).

3-/ Démontrer que l'équation $f\,(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur [–2 ; 4].

4-/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\ (x) = (ax+b)e^{-x}$.

a-/ Déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f .

b-/ Calculer en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = – 2 et x = 4.

Donner une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2.