EXERCICE 1 :……………… (5 points)

1-/ Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (α ; β) dans chacun des cas suivants :

a) $17\alpha - 19\beta = 2$ (0,5pt)

b) $17\alpha - 19\beta = -2$ (0,5pt)

2-/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

a) $n \equiv 0\ [17]\ \ et\ \ n \equiv -2\ [19]$ (0,5pt)

b) $n \equiv 0\ [19]\ \ et\ \ n \equiv -2\ [17]$ (0,5pt)

3-/ En déduire l'ensemble des entiers n tels que n^2+2n soit divisible par 323. (1pt)

4-/ P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(o\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

On considère l'application affine $f : P \to P;\quad M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a-/ Vérifier que *f* est bijective. (0,5pt)

b-/ Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*. (0,5pt)

c-/ On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M'. Exprimer Z' en fonction de Z. en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. (0,5pt)

EXERCICE 2 : …………….(4 points)

1-/ On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$$ où y et z désignent deux fonctions inconnues de variables x.

a-/ Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait y(x). (0,5pt).

b-/ Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système. (0,5pt)
Préciser la solution particulière pour laquelle on a : y=1 et z= –1 pour x=0. (0,5pt)

2-/ On considère la suite complexe (W_n) définie par : $\forall n \ \varepsilon\ \mathbb{N}^*$ $W_n = \left(1+\frac{1}{nz}\right)^n$ où z est un complexe non nul tel que z = x + iy.

a-/ Calculer ln|W_n| et montrer que : $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right)$ (1pt)

b-/ On pose $\alpha_n = \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n \quad puis \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n$ (1pt)

- Vérifier que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\alpha_n \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}$. (0,5pt)

En déduire pour z complexe de module 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln|W_n| \quad puis \quad \lim\limits_{n\to+\infty}|W_n|$. (1pt)

PROBLÈME: …………………(10 points)

I-/

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur [0 ;+∞[par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit ($C_k$) la courbe représentant les variations de f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités (5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la fonction g définie sur [0 ;+∞[par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1-/ Etudier le sens de variation de g. (0,5pt)

2-/ En déduire que pour tout réel α positif ou nul, ln(1+ α) ≤ a. (0,5pt)

II-/

1-/ Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à [0 ;+∞[et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 . (1pt)

2-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à [0 ;+∞[, $f_1(x) = \ln(1+\frac{x}{e^x})$.

En déduire la limite de f_1 en +∞. (0,5pt)

3-/ Dresser la tableau de variation de f_1. (0,5pt)

III-/

1-/ Calculer $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à [0 ;+∞[et en déduire le sens de variation de la fonction f_k . (1pt)

2-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à [0 ;+∞[$f_k(x) = \ln(1 + k\frac{x}{e^x})$

En déduire la limite de f_k en +∞.(1pt)

3-/ a-/ Dresser la tableau de variation de f_k . (0,5pt)

b-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à [0 ;+∞[, on a $f_k(x) \le \frac{k}{2}$. (0,5pt)

4-/ Déterminer une équation de la tangente T_k à (C_k)

5-/ Soit *p* et *m* deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m). (0,5pt)

6-/ Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en 0 dans le repère orthogonal du plan. (1,5pt)

IV-/

Soit λ un réel strictement positif, on note A(λ) l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe (C_k) et les droites d'équations x = 0 et x = λ.

1-/ Sans calculer A(λ), montrer que $A(\lambda) \le \int_0^{\lambda} kxe^{-x}dx$

(on pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I-/). (0,5pt)

2-/ Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^{\lambda} kxe^{-x}dx$. (0,5pt)

3-/ On admet que A(λ) a une limite en + ∞. Montrer que $\underset{\lambda \to +\infty}{A(\lambda)} \le k$.

Interpréter graphiquement ce résultat. (0,5pt)