

SERIES: SET– MTI – MTGC - TSE

EXERCICE 1 : (4 points)

Soit A et B deux points distincts du plan affine euclidien \mathcal{P} et G le barycentre du système $\{(A,-2);(B,1)\}$.

1) Démontrer que A est le milieu du segment [GB].

2) Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan \mathcal{P} vérifiant $\frac{MA}{MB} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre G et de rayon r que l'on déterminera en fonction de AB.

3) Soit C un point de (Γ) et (\mathcal{D}) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-2MB^2 + MB^2 + MC^2 = 0$$

Montrer que le point C appartient à (\mathcal{D}) .

4) Calculer $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CG}$ et en déduire l'ensemble (D).

5) Démontrer que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 2 : (5points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (p,q) : $11p - 7q = 1$

b) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ?

c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200.

2) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle d'inconnue f :

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$$

b) Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$. On pose : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.

Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

3) Soit (U_n) une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

a)- Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$; calculer U_2 .

b)- On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3 ;

Sachant que $\frac{m}{d} = 12$; déterminer U_1 et U_3 .

c)- En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ en fonction de n.

Déterminer n pour que S_n soit égale à 525.

PROBLEME : (11points) Les Parties A et B du problème sont indépendantes**Partie A :**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

définie par $z' = \frac{5}{z}$ où \bar{z} est le conjugué de z .

1) Déterminer l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $1+i$.

Vérifier que les points O, A et A' sont alignés.

2) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés.

3) Trouver l'ensemble (Γ) des points invariants par f .

4) a) Soit $z \neq 0$, montrer que si $|z - (1+i)| = \sqrt{2}$ alors $\left| \frac{5}{1-i} - \frac{5}{z} \right| = \left| \frac{5}{z} \right|$

b) En déduire que si M est un autre point autre que O du cercle (C) de centre A passant par O, alors son image M' par f appartient à une autre droite (D) que l'on déterminera.

c) Montrer que tout points de (D) est l'image par f d'un point de $(C) - \{O\}$ par f .

d) Tracer (Γ) , (D) et (C) dans le même repère.

e) En déduire l'image $(C) - \{O\}$ par f .

Partie B : n est un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$

par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$

1- a) Etudier les variations de f_1 puis donner une équation de la tangente (T) à sa courbe (C_1) au point d'abscisse 0.

b) Tracer (C_1) et (T) dans le même repère (unité 3 cm)

c) Exprimer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (T), (C_1) et la droite d'équation $x = 1$.

2- Montrer que f_1 réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. Construire sur le même repère que (C_1) la courbe (C'_1) de la bijection réciproque f_1^{-1} .

3- a) Calculer $f'_n(x)$ et donner son signe sur $[0; +\infty[$. Préciser $f'_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Donner le tableau de variation de f_n .

b) Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

c) Démontrer par récurrence que, pour tout n élément de \mathbb{N} , $e^{n+1} > 2n+1$, en déduire le signe de $f_n(n+1)$.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$.

Cette solution est notée U_n .

e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n}$.

f) En remarquant que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$. Montrer que la valeur

moyenne M_n de f_n sur $[0; U_n]$ est égale à : $1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2 \left(\frac{n}{U_n} \right) \ln \left(\frac{U_n}{n} + 1 \right)$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.