EXERCICE 1 : (4 points)

f est une fonction numérique à variable réelle x pour laquelle on a les informations suivantes :

- f est définie et dérivable sur] – 4 ; +∞**[;**
- $f'(-2) = f'(2) = 0$;
- Si x ∈] – 4 ; – 2**[** ∪] 2 ; +∞**[** alors f'(x) $>$0 ;
- Si x ∈] –2 ; 2**[** alors f'(x) $<$ 0 ;
- Les droites d'équations x = – 4 et y = 4 sont les asymptotes à la courbe (C) de f ;
- La courbe (C) passe par les points A(– 3;0), B(4 ; 0), O(0;0) et E($\frac{11}{2}$;2).

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé
3. Trouver l'ensemble de définition de : ln (f (x)).

EXERCICE 2 : (6 points)

I–. Une entreprise est équipée de machines-outils toutes identiques. On a constaté que le coût instantané d'entretien d'une machine d'âge x (0 $\leq$ x $\leq$ 6) est : $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{0,5x}$

Son coût total d'entretien depuis son achat et pour une durée t (0 $\leq$ t $\leq$ 6) d'utilisation est : $E(t) = \int_0^t \varphi(x)\,dx$

Calculer les coûts au temps t = 1 (c'est-à-dire E(1)) et au temps t = 5 (c'est-à-dire E(5)).

II– 1. Résoudre dans ℝ l'équation $4x^2 - 17x + 4 = 0$

2. n étant un entier naturel non nul, résoudre dans ℝ l'équation :

$$4x^{\frac{2}{n}} - 17x^{\frac{1}{n}} + 4 = 0$$ d'inconnue x.

On désigne par U_n et V_n ses solutions.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

b) Exprimer en fonction de n

$T_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ *et* $W_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$

Calculer leurs limites.

PROBLEME : (10 points)

Une entreprise fabrique un solvant pour peinture. On désigne par x le m^3 de solvant produit chaque jour : x $\in [1;6]$. Le coût total de production de ces x mètres cubes de solvant, en millions de francs est :

$$C_t(x) = \frac{x^2}{4} + 2{,}8 + 2\ln x$$

On cherche à déterminer le prix de vente pour que l'entreprise fasse des bénéfices.

A-/ Étude de la fonction « coût total » C_t.

1-/ Etudier les variations de **C_t** sur $[1;6]$.

2-/ a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

X	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
C_t (x)											

b) Tracer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction C_t
(Unités graphiques : 2 cm pour 1m^3 et 1 cm pour 1 million).

B-/ Étude de la fonction « coût moyen » C_m.

Pour une production journalière de x mètres cubes, le coût moyen de production en millions de francs de 1 m^3 est :

$$C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x}.$$

1-/ Ecrire $C_m(x)$ en fonction de x.

2-/ Démontrer que pour tout réel x de $[1;6]$ $C_m'(x)$ a le même signe que

$$f(x) = x^2 - 3{,}2 - 8\ln x.$$

3-/ a) Etudier les variations de f sur $[1;6]$.

b) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet une solution unique α dans $[1;6]$ puis déterminer une valeur approchée par excès de α à 0,1 près.

Dans la suite du problème, on utilisera cette valeur approchée dans les calculs.

4-/ a) Etudier les variations de la fonction C_m sur $[1;6]$.

b) Quel est le coût maximal de production de 1 m^3 de solvant ? Pour quelle production ?

c) Comment faut-il choisir le prix de vente de 1m^3 de solvant pour que l'entreprise puisse réaliser des bénéfices.