

SERIES: SET- MTI – MTGC - TSE

Exercice 1 :----- [4,5 points]

1°/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2 + a}{2}$ avec a un entier naturel non nul.

a.) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés. (1pt)

b.) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?
Etudier la réciproque de la propriété a.) (1pt)

2°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, (unité graphique 4 cm) on considère la courbe (\mathcal{C}) d'équation $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

a.) Préciser les éléments de symétrie de (\mathcal{C}) (1pt)

b.) Construire (\mathcal{C}) dans le plan muni du repère orthonormé. $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. (1,5 pt)

Exercice 2 : ----- [5,5 points]

1°/ Soit f l'application affine du plan \mathcal{P} dans lui-même définie par son expression

$$\text{analytique : } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

a.) Montrez que f admet un seul point invariant J . (0,5pt)

b.) Montrez que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{JM}$ où $M' = f(M)$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f . (1pt)

c.) Déterminer le centre et le rayon du cercle \mathcal{C}' image du cercle \mathcal{C} d'équation :
 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f . (1pt)

2°/ On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

a.) Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E) dans \mathbb{R} (1,5pt)

b.) Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$; puis en déduire les solutions de l'équation (E) (1,5pt)

Problème : ----- [10 points]

A-//

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

1°/ a.) Justifier l'existence d'un réel unique α compris entre 0,5 et 1 tel que

$$f(\alpha) = 0 \quad (1,5pt)$$

b.) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x (1 pt)

2°/ Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$. En déduire le tableau de variation de g (1,5pt)

B-//

1°/ Montrer que le réel α défini dans la partie A-// 1°/ a.) est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x). \quad (1pt)$$

2°/ a.) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ (0,5pt)

b.) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ (0,5pt)

c.) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$. (0,5pt)

TSVP 

d.) En déduire que, $\forall x \in [\frac{1}{2} ; 1]$ on a $0 \leq h'(x) \leq 0,3$. (0,5pt)

3°/ On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = h(U_n)$.

a.) Montrer que, pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$, et que la suite (U_n) est décroissante.

(1 pt)

b.) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq (0,3) \times |U_n - \alpha| \text{ puis que } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n.$$

c.) En déduire que la suite (U_n) converge vers α . (0,5pt)

d.) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de U_{n_0} donnée par la calculatrice. (avec 5 décimales). (0,5pt)