SERIES: MTE-TSEco-STG

Exercice 1………………………………………………(5 points)

1-/ Factoriser en un produit de facteurs : $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. *(1 pt)*

2-/ a-/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. *(1 pt)*

b-/ En se servant des résultats du a-/, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$
- $e^{x^3} + 2e^{x^2} - e^x - 2 = 0$.

Exercice 2………………………………………………(5 points)

Lorsque l'on place de l'argent à intérêts composés, les intérêts produits par le capital s'ajoutent à la fin de chaque année à ce capital et produisent à leur tour des intérêts.
Exemple : *Un capital de 10 000 F placé à 5% à intérêts composés rapporte 500 F pendant la première année. Le montant constitué qui représente le nouveau capital est de (10 000 + 500) soit 10 500 F ; ce montant produira un intérêt de 525 F pendant la deuxième année. Le capital devient (10 500 + 525) soit 10 500F. Les montants successsifs produiront de même des intérêts à la fin des autres années.*

On utilisera les notations suivantes :
C_0 : Capital placé au debut de la première année ;
t : Taux (c'est à dire le revenu de 100F pendant un an) ,
n : Durée du placement en année.

1-/ à la fin de la première année, le capital C_0 est devenu $C_1 = C_0 (1 + t)$.
A la fin de la deuxième année, le capital C_t est devenu $C_2 = C_1 (1 + t)$.
a-/ Exprimer C_2 et C_3 en fonction de C_0 et t. *(1,5pt)*
b-/ Exprimer C_n en fonction de $C_{0,}$ t et n où C_n est le montant dont on dispose à la fin de la nième année de placement du capital C_0. *(1,5pt)*.
2-/ On pose t = 0,05 ; en combien de temps le capital est-il doublé ? *(2pts)*

Problème……………………………………………..(10 points)

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C est défini sur [0 ; 10] par

$$C(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$$

Le but du problème est d'étudier le coût total C_t , et le coût moyen C_m de la production, puis de minimiser le coût moyen.
Les coûts sont exprimés en milliers de francs.

1-/ Étude de C_t

a-/ Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de [0 ; 10]

$$C(x) = ax + \frac{b}{x + 1} \quad (1pt)$$

b-/ La fonction C_t est la primitive de C qui s'annule pour x = 0. Déterminer C_t.(1pt)

2-/ Étude d'une fonction auxiliaire *f*.

On considère la fonction *f* définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1)$

a-/ Montrer que la fonction $f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x-1)^2}$.

b-/ Dresser le tableau de variation de *f* sur l'intervalle sur [0 ; 10].
On admettra que f s'annule pour = 1,712 *(1,5pt)*

3-/ Étude du coût moyen C_m

La fonction C_m est définie sur]0 ; 10[par:

$$C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

a-/ Calculer la dérivée C'_m au point x
Vérifier que l'on peut écrire :

$$C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2} \quad (1,5\ pt).$$

Où *f* est la fonction auxiliaire introduite dans la question **2-/.**

b-/ Étudier le sens de variation de C_m sur]0 ; 10]. *(1,5 pt).*

c-/ Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum, et quel est ce coût ?. *(2 pts).*