BAC 2009

SÉRIES : ***SET- MTI – MTGC - TSE***

Exercice 1 ---------- [*3 points*]

1°/ z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

a.) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E). *(0,5pt)*

b.) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique. (*1pt*)

2°/ Soit ABCD un carré du plan.

a.) Écrire A comme barycentre des points B, C et D (On précisera les coefficients) (*0,5pt*)

b.) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0 \qquad (1pt)$$

Exercice 2 ---------- [*5,5 points*]

1°/ On considère la suite (U_n) définie par, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$

a.) Préciser le sens de variation de la suite (U_n). *(0,5pt)*

b.) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n > n^2$; en déduire la limite de la suite (U_n). *(1pt)*

c.) Conjecturer une expression de U_n en fonction de n puis démontrer la propriété ainsi conjecturée. *(1pt)*

TSVP ☛

2°/ Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

a.) $(n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i!$ *(1pt)* ; **b.)** $\sum_{i=1}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$ *(1pt)*

NB $n!$ désigne factorielle n

3°/ Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110cm de longueur sur 88cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.

a.) Déterminer la longueur du côté du carré qui convient. (*0,5pt*)

b.) Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal. (*0,5pt*)

Problème --[*11,5 points*]

A-//

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = e^{-x} \ln x$$

1°/ Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$ *(0,75pt)*

2°/ a). Étudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2. (*1pt*)

b). Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0\,;\alpha[$ et $]\alpha\,;+\infty[$ (*0,5pt*)

3°/ Vérifier que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$ (*0,75pt*)

4°/ Achever l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (*1pt*)

B-//

1°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$ *(0,5pt)*

2°/ a.) Calculer $h'(x)$ et vérifier que $\forall x \in [\frac{3}{2}\ ; 2]$ on a : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

En déduire qu'il existe un réel $k \in [0\ ; 1]$ tel que $\forall x \in [\frac{3}{2}\ ; 2]$, $|h'(x)| \leq k$ (*1pt*)

b.) Prouver que pour tout couple de réels (x, y) choisis dans $[\frac{3}{2}\ ; 2]$

on a $|h(x) - h(y)| \leq k\,|x - y|$ (*0,5pt*)

3°/ Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$

a.) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\frac{3}{2}\ ; 2]$ (*0,5pt*)

b.) En appliquant à $(U_n\ ; \alpha)$ l'inégalité établie dans 2°/ b.), prouver que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$ (*0,5pt*)

c.) En déduire par un raisonnement par récurrence l'inégalité :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$ et montrer que la suite (U_n) est convergente.

Quelle est sa limite ? (*0,5pt*)

4°/ Montrer en utilisant les variations de h que $U_{n+1} - \alpha$ et $U_n - \alpha$ sont de signe contraires. En déduire que α est compris entre U_n et U_{n+1} (*1pt*)

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. (*0,5pt*)

C-//

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0\ ; +\infty[$ solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}.$$

1°/ a.) Vérifier que la fonction f définie dans la partie A-// est une solution de (E) (*0,5pt*)

b.) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$ (*0,75pt*)

2°/a.) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0\ ; +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - f$ est une solution de (E'). (*0,75pt*)

b.) En déduire toutes les solutions de (E) (*0,5pt*)

2°/a.) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0\ ; +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - f$ est une solution de (E'). (*0,75pt*)

b.) En déduire toutes les solutions de (E) (*0,5pt*)