Exercice 1 -- [*5 points*]

On considère l'équation d'inconnue complexe z,

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (*1pt*)

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (*1pt*)

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E). (*1pt*)

4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4ème solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. (*1pt*)

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) (*1pt*)

Exercice 2 -- [*5 points*]

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O\,;\vec{i})$.

1°/ Soit M un point du plan et M_1 son image par S; on pose $M' = \sigma(M_1)$

a) Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M. (*1,5pt*)

b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M'. (*1pt*)

c) Au point $M(x\,;y)$ on associe maintenant le point N(X ; Y) telles que :

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ. (*1pt*)

2°/ Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N.

Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N) ? (*1,5pt*).

TSVP ☛

Problème-- [***10 points***]

A.// Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1°/ Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$. (*0,5pt*)

2°/ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (*1pt*)

3°/ On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 en est une. (*0,5pt*)

b) L'autre solution est appelé α. Montrer que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$ (*0,5pt*)

4°/ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x. (*1pt*)

B.// Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$) (*0,5pt*)

2°/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie **A.**//) Etudier le sens de variation de f. (*1pt*)

3°/ Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie1.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$ (*1,5pt*)

4°/ Etablir le tableau de variation de f. (*0,5pt*)

5°/ Tracer la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm). (*1pt*)

C.// Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx$

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. (*0,5pt*)

2°/ À l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \dfrac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$. (*1pt*)

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \dfrac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (*0,5pt*). $|I_n|$ désigne la valeur absolue de I_n.

NB : *La parie* **C.**// *est indépendante des parties* **A.**// *et* **B.**//