SUJET

Exercice 1 .... (5 pts)

1-/ Soit le polynôme de variable complexe $P(z) = z^3 - iz^2 + az - 3(2 + i)$

a-/ Déterminer le nombre complexe a pour que $P(2 + i) = 0$

b-/ Vérifier qu'alors :

$P(z) = (z - 2 - i)(z^2 + 2z + 3)$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$

2-/ Soit le polynôme P' définie dans $\mathbb{C}$ par :

$P'(z) = z^3 + (-2 - 3i)z^2 + 3(1 + 2i)z - 9i$.

a-/ Montrer que P' admet une racine imaginaire pure c'est-à-dire de la forme xi où x est un réel.

b-/ Factoriser $P'(z)$

c-/ En déduire les solutions de l'équation $P'(z) = 0$

Exercice 2 .... (5 pts)

En cette année 2 011, les frais d'abonnement annuel à une revue scientifique s'élèvent à 20 000 Fcfa. Chaque année, ces frais augmentent de 6%.

1-/ Déterminer le prix du magazine en 2 012 et en 2 013.

2-/ On désigne par (P_n) les frais d'abonnement à cette revue en l'an (2 011 + n).

a-/ Démontrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b-/ Exprimer, pour tout entier naturel n, (P_n) en fonction de n.

3-/ **a-/** Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $(1,06)^n \geq 2,5$.

b-/ Mr Haïdara dispose d'un budget annuel de 50 000 Fcfa pour l'abonnement à la revue. Ce budget lui suffira-t-il pour assurer l'abonnement à la revue de façon permanente ?

Si la réponse est non, dire à partir de quelle année, Mr Haïdara ne pourra plus s'abonner à la revue.

SVP ☛

Problème ....(10 pts)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x - 4.$$

On appelle **($\mathcal{C}$)** sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

A-// Calcul de limite

1-/ Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2-/ Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = e^{x}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right).$$

Montrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln\frac{2}{3}$.

Étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

3-/ Montrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$.

En déduire que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à **($\mathcal{C}$)**. Étudier la position de **($\mathcal{C}$)** par rapport à $\mathcal{D}$.

B-// Étude de variations et Calcul d'aire

1-/ Calculer $f'(x)$. Montrer que pour $x \in\,]-\infty\,;\,1[$:

$$f'(x) = (3e^{x} + 2)(e^{x} - 1).$$

En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de la fonction f.

2-/ Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 dans l'intervalle $[-3\,;\,0]$. On admettra que $-2{,}1 < x_0 < -2$.

4-/ Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^{x} - 2 = 2$.

En déduire qu'il existe un point **A** unique de **($\mathcal{C}$)** où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de **A** est égale à $\ln\frac{4}{3}$.

4-/ Tracer la droite $\mathcal{D}$, la courbe **($\mathcal{C}$)** et la tangent à **($\mathcal{C}$)** au point **A**.

5-/ Calculer $\mathbf{I} = \displaystyle\int_{\ln\frac{2}{3}}^{0}\left(\frac{3}{2}e^{2x} - e^{x}\right)dx$.