Exercice 1 ---[6 *points*]

A/. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$$

1°/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. **(*0,5pt*)**

2°/ Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de D_f on ait

$$f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x} \quad (1pt)$$

3°/ En déduire l'ensemble des primitives de f sur D_f **(*0,5pt*)**

B/. Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit

et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept

1°/ Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commençantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues. **(*1,5pts*)**

2°/ Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter. **(*1pt*)**

3°/ a-) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers **(*0,5pt*)**

b-) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le pgcd(m_1 ; m_2). **(*0,5pt*)**

4°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs. **(*0,5pt*)**

TSVP

Exercice 2 --[6 *points*]

I/ On considère le complexe Z défini par $Z = \dfrac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1°/ On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ Ecrire X et Y en fonction de x et y. **(*1,5pt*)**

2°/ Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul. **(*1pt*)**

3°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ). **(*1pt*)**

II/ 1°/ On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ? **(*1,5pt*)**

2°/ Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que :

$n^2 - 240$ est un carré parfait. **(*1pt*)**

Problème --[8 *points*]

Soit f la fonction de $[0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$.

1°/ a-) Etudier le sens de variation de f. **(*1,5pt*)**

b-) Etudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(*0,5pt*)**

c-) Dresser le tableau de variation de f. **(*0,5pt*)**

2°/ On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$: 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

a-) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse nulle. **(*0,5pt*)**

b-) Tracer (T) et $(\mathscr{C})$. **(*1pt*)**

3°/ En utilisant les variations de f, démontrer que $\forall x \in [1 ; 2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$ **(*1pt*)**

4°/ a-) Démontrer que pour tout réel x de $[1 ; 2]$, on a : $| f'(x) | \leq \dfrac{2}{3}$ **(*1,5pt*)**

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout x de $[1 ; 2]$ on a : $| f(x) - 2 | \leq \dfrac{2}{3} | x - 1|$. En déduire un encadrement de f sur $[1 ; 2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure. **(*1,5pt*)**

Exercice 1 ---[6 *points*]

1°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère les points A(1 ; –1) et B(5 ; 3) et la suite (Ω_n) définie par : pour tout entier $n \geq 1$, Ω_n est le barycentre de $(\Omega_{n-1} ; 2)$, (A ; 1) et (B ; 1) et Ω_0 est en O. On note $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de Ω_n.

a) Placer dans le plan les points Ω_1, Ω_2 et Ω_3 et montrer qu'ils sont alignés.

b) Montrer que pour tout entier naturel *n*, Ω_{n+1} est l'image de Ω_n par une homothétie que l'on précisera.

c) Justifier que, pour tout entier n de IN, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}$.

d) Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel non nul *n* on a :

$x_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{3}{2^n}$. En déduire une expression simple de x_n en fonction de n, puis la limite de la suite (x_n).

2°/ Donner la solution générale sur IR de l'équation différentielle :
$y'' + y' - 2y = 0$ et en déduire la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3$ sachant que le polynôme $P(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de (E)

Exercice 2 ---[5 *points*]

1°/ a) Résoudre dans Z×Z l'équation : $5x - 11y = 4$. (1pt)

b) En déduire la résolution dans **Z** du système $\begin{cases} 3\alpha \equiv 1[5] \\ 7\alpha \equiv 9[11] \end{cases}$ (1pt)

2°/ Trouver les couples (*x* ; *y*) d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur *d* et le plus petit commun multiple *m* vérifient $3m - 2d = 30$.

3°/ Pour tout entier naturel *n*, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

a) Montrer que, pour tout *n*, $A_{n+3} \equiv A_n\ [7]$ (1pt)

b) Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $A_n \equiv 0\,[7]$ (1pt)

c) Les nombres $\alpha = \overline{1110}^2$; $\beta = \overline{1010100}^2$; $\lambda = \overline{1001001000}^2$ sont-ils divisibles par 7. (1pt)

Problème -- **[8 *points*]**

1°/ On considère g, la fonction numérique de courbe représentative (Γ) définie sur IR

$$\text{par } g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}.$$

a) Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthonormal du plan, en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2°/ Soit *h* la fonction numérique définie sur R par $h(x) = \left|xe^{x-1}\right|$.

a) Etudier la dérivabilité de *h* en 0 et en1.

b) Donner une méthode permettant d'obtenir la courbe (Γ') représentative de *h* sur

] –∞ ; 1] à l'aide de (Γ).

c) Etudier les variations de *h* et dresser son tableau de variation

d) Tracer (Γ') ainsi que les demi-tangentes à (Γ') aux points d'abscisses 0 et 1 dans le

même repère que (Γ).

3°/ Soit la suite (U_n) avec *n* un entier naturel non nul défini pour tout *n* par

$$U_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$$

(On rappelle que $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\times 3\times 2\times 1$ avec $0! = 1$)

a) Calculer U_1.

b) En utilisant l'intégration par parties, exprimer U_n en fonction de U_{n-1} pour

$n \geq 1$. En déduire que $U_n - e = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{k!}\right)$ pour $n \geq 1$.