

Exercice 1 (5 points)

1°/ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes:

a) $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$ (1pt)

b) $Z + \frac{1}{Z} = 1$ (1pt) $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$ (1pt)

2°/ Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que :

$$P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$$

a) Vérifier que pour tout Z non nul on a :

$$\frac{P(Z)}{Z^2} = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \sqrt{2} \quad (1pt)$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(Z) = 0$ (1pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans une ville, il existe deux lycées, l'un de garçons et l'autre de filles ; chaque lycée a une classe de SBT₁, une de SBT₂ et une de SBT₃. Une bourse d'étude est offerte par la ville à six élèves pris parmi les élèves des six classes de terminales. Pour cela on choisit les six meilleurs élèves de chaque classe, soit en tout, 36 élèves et les noms des six boursiers sont alors déterminés par tirage au sort parmi les 36 élèves.

Calculer les probabilités suivantes :

a) Pour que les 6 boursiers soient les 6 élèves de la SBT₂ garçons. (1pt)

b) Pour que les 6 boursiers soient des élèves de la SBT₂. (1pt)

c) Pour que les 6 boursiers soient des filles. (1pt)

d) Pour que les 6 boursiers soient 3 filles et 3 garçons. (1pt)

e) Pour que parmi les 6 boursiers, il y ait moins de 3 garçons. (1pt)

Problème (10points)

1°/ Soit la fonction numérique g définie sur]0 ; + ∞[par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

a) Etudier le sens de variation de g et calculer g(1). (1pt)

b) En déduire le signe de g(x). (1pt)

TSVP  

2°/ Soit f la fonction numérique définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$

a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. (0,5pt)

b) Calculer $f'(x)$. (0,5pt)

c) Montrez que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduire le tableau des variations de f . (2pts)

d) Montrez que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 ; donnez, en justifiant, un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles. (1pt)

3°/ On note (\mathcal{C}) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ d'unité graphique 4cm.

a) Montrez que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (\mathcal{C}) (1pt)

b) Etudiez la position de (\mathcal{C}) par rapport à (D). (0,5pt)

c) Déterminez les coordonnées du point A de (\mathcal{C}) où la tangente est parallèle à (D). (0,5pt)

d) Tracez (\mathcal{C}) et (D) dans le même repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$. (2pts)