

SÉRIE : TSExp

Exercice 1 / [5 points]

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année (2015 + n)

1°/ a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017. (0,5pt)

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n . (1pt)

2°/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme. (1pt)

b) Exprimer U_n en fonction de n , en déduire X_n en fonction de n (1pt)

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ? (1pt)

d) Calculer la limite de la suite (X_n) . Conclure (0,5pt)

Exercice 2 / [7 points]

I-/ Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]0 ; 2[, f'(x) < 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$

1°/ Dressez le tableau de variation de f . (0,5pt)

2°/ (\mathcal{C}_f) représentant les variations de f , précisez les équations des asymptotes à (\mathcal{C}_f) (0,5pt)

3°/ Précisez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5pt)

4°/ Tracez dans le même repère (\mathcal{C}_f) et ses asymptotes. (1pt)

5°/ Donnez l'ensemble de définition des fonctions définies par : $\ln(f(x))$ et $\frac{1}{f(x)}$

où \ln désigne le logarithme népérien. (1pt)

TSVP

II- Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1°/ Ecrire z_1, z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique. **(1,5pt)**

2°/ Montrez qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles. **(2pts)**

Problème / [8 points]

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$.

1°/ a) Déterminez l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble. **(1pt)**

b) On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2\ln x$:

- Etudiez les variations de h sur $]0 ; +\infty[$. **(1pt)**
- En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. **(0,5pt)**

c) Etudiez les variations de f ; dressez son tableau de variation. **(1,5pt)**

d) Prouvez que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. **(0,5pt)**

2°/ a) Tracez la courbe (\mathcal{C}_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ **(1pt)**

b) On désigne par $\mathcal{A}(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}_f) , Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculez $\mathcal{A}(k)$. **(1,5pt)**

c) Pour quelle valeur de k a-t-on $\mathcal{A}(k) = 8$? **(1pt)**