

EXERCICE I :

Calculer les intégrales suivantes : 1° $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^4} dx$; 2° $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos^2 x) dx$

EXERCICE II :

On considère un sac contenant 3 boules rouges et 6 boules vertes. On tire de ce sac une boule, on constate sa couleur, on le remet dans le sac et on tire de nouveau une boule. On désigne par x le nombre de boules rouges obtenues au bout des 2 tirages et par y le nombre de boules vertes obtenues.

- 1° Déterminer les lois de probabilité respectives de x , de y .
- 2° Déterminer l'espérance mathématique et la variance de x et de y .

EXERCICE III :

\mathbb{C} désignant le corps des nombres complexes, soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$

- 1° Calculer les nombres complexes a, b, c pour que: $f(z) = (z - 1-i)(az^2 + bz + c)$
- 2° Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$
- 3° Montrer que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équation sont alignés.

EXERCICE IV :

Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale, N s'écrive \overline{abcd} et que l'entier qui s'écrit \overline{bcda} soit divisible par 7.

- 1° Montrer que si $a = 7$, alors $-10N \equiv 0 \pmod{7}$; en déduire que pour cette valeur de a , N est divisible par 7.
- 2° Montrer que $10N - 3a$ est divisible par 7 ; en déduire que si N est divisible par 7 alors $a = 7$.

EXERCICE V :

- 1° Dresser le tableau des variations de la fonction numérique g définie par :

$g(x) = 1 - x e^{-x}$. En déduire que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On pose : $e^{1/2} = 1,65$ et $e^{3/4} = 2,12$.

- 2° Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$;

calculer : $f(-\frac{3}{4})$ et $f(-\frac{1}{2})$. En déduire qu'il existe $\alpha \in]-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}[$ tel que :

$f(\alpha) = 0$. (On ne cherchera pas à calculer α).

On rappelle que l'ensemble F des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , définies et dérivables en tout réel x , est un espace vectoriel sur \mathbb{R} ; si $f \in F$, on note f' et f'' les fonctions dérivées premières et secondes de f quand f'' existe; a et b étant deux nombres réels non nuls, on considère les fonctions f_1 et f_2 de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = e^{ax} \cos(bx)$ et $f_2(x) = e^{ax} \sin(bx)$.

Soit E le sous-espace de F engendré par f_1 et f_2 .

1°) Montrer que $B = (f_1; f_2)$ est une base de E . Dans la suite du problème, on supposera que E est un espace vectoriel euclidien dont \mathcal{B} est une base orthonormée.

2°) Soit α un réel donné; si $f \in E$, montrer que la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x + \alpha)$ est un élément de E .

On pose $\varphi_\alpha(f) = g$; on définit ainsi une application φ_α de E dans E . Calculer $\varphi_\alpha(f_1)$ et $\varphi_\alpha(f_2)$ en fonction de f_1 et f_2 .

a) Montrer que φ_α est linéaire et déterminer sa matrice M_α dans la base \mathcal{B} .

b) En déduire que φ_α est la composée d'une homothétie vectorielle et une rotation vectorielle dont on déterminera respectivement le rapport et l'angle.

c) Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; comparer $\varphi_{\alpha+\beta}(f_1)$ et $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)(f_1)$ ainsi que $\varphi_{\alpha+\beta}(f_2)$ et $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)(f_2)$.

On pourra utiliser les matrices M_α et M_β . Montrer que $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$.

3°) a) Montrer que si $f \in E$, alors $f' \in E$. on note Φ l'application de E dans E qui à f associe f' . Montrer que Φ est une application linéaire et déterminer la matrice D dans la base \mathcal{B} .

b) Montrer que D est inversible et calculer D^{-1} .

Vérifier que $D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I = O$ (où I désigne la matrice carrée d'ordre 2 et O la matrice de l'application identiquement nulle). En déduire que $\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R},$

$$f''(x) - 2af'(x) + (a^2 + b^2)f(x) = 0.$$

c) r étant un réel non nul, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(rx)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{rx} - 1}{x}$$

d) Montrer que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{a\alpha} \cos(b\alpha) - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{a\alpha} - 1}{\alpha}$. Calculer la matrice $\frac{1}{\alpha}(M_\alpha - I) - D$ et montrer que chacun de ses éléments tend vers 0 quand α tend vers 0.

4°) Soient $g = r_1 f_1 + r_2 f_2$ et $f = t_1 f_1 + t_2 f_2$ deux éléments de E . Calculer t_1 et t_2 en fonction de r_1 et r_2 pour qu'on ait $g = \Phi(f)$. Déterminer alors les primitives de f_1 et f_2 dans E .

5°) n étant un entier naturel, calculer $U_n = \int_0^\pi e^{ax} \cos(nx) dx$ et $V_n = \int_0^\pi e^{ax} \sin(nx) dx$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.