République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2015

Session Complémentaire

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \frac{5^n}{2^n}$.

Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $V_n = \ln U_n$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite (U_n) est :	Arithmétique	Géométrique	Ni l'une ni l'autre	(0,5pt)
2	La suite (U_n) est :	Convergente vers 0	Convergente vers $\frac{5}{2}$	Divergente	(0,5pt)
3	La suite (U_n) est :	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0,5pt)
4	La somme S_n est égale à :	$S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{5}{2}\right)^n\right)$	$S_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}-1\right)$	$S_n = \frac{1+\left(\frac{5}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}$	(0,5pt)
5	Le plus petit entier naturel n tel que $U_n \geq 2015$ est	$n=8$	$n=9$	$n=10$	(0,5pt)
6	La suite (V_n) est :	Arithmétique	Géométrique	Ni l'une ni l'autre	(0,5pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1) On considère les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$E_1 : \quad z^2 - 6z + 25 = 0$$
$$E_2 : \quad z^2 - 8z + 25 = 0$$

a) Résoudre E_1. On note z_1 et z_2 ses solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$. (1 pt)

b Résoudre E_2. On note z_3 et z_4 ses solutions avec $\text{Im}(z_3) > 0$. (1 pt)

c) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres $z_1 + z_3$ et $z_1 \times z_3$. (0,75 pt)

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3+4i$ on pose : $f(z) = \frac{z-4-3i}{z-3-4i}$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 3+4i$, $z_B = 4+3i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère. (0,5 pt)

b) Calculer et mettre sous forme algébrique le nombre complexe $f(4+4i)$. Interpréter graphiquement. (0,75 pt)

c) Déterminer et représenter, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les ensembles de points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$. (0,5 pt)

Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)

Exercice 3 (6 points)

1) On considère la fonction numérique g définie par : $g(x)=(2x+1)e^{x}+1$.

a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$. (0,5 pt)

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g . (0,75 pt)

c) En déduire que pour tout réel x ; $g(x)>0$. (0,25 pt)

2) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x+2+(2x-1)e^{x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (0,5 pt)

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. (0,25 pt)

c) Montrer que la droite D d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$ puis déterminer leurs positions relatives. (0,5 pt)

3) Ecrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et dresser le tableau de variation de f . (0,75 pt)

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5 pt)

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-0{,}86<\alpha<-0{,}85$. (0,5 pt)

5.a) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente T à (C) est parallèle à l'asymptote oblique. Préciser les coordonnées de A et donner l'équation de T. (0,5 pt)

b) Construire la courbe (C) , la tangente T et l'asymptote D. (0,5 pt)

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (0,25 pt)

$$(2x-1)e^{x}-m+2=0 .$$ (0,25 pt)

Exercice 4 (6 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^{2}+\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^{+}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g . (0,5 pt)

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. (0,5 pt)

b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α telle que $0{,}54<\alpha<0{,}55$. (0,5 pt)

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. (0,25 pt)

Partie B

(0,5 pt)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x-\dfrac{1+\ln x}{x}$. (0,5 pt)

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $2cm$. (0,5 pt)

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to0^{+}} f(x)=+\infty$ et en donner une interprétation géométrique. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)$ .En déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$. (0,5 pt)

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ) . (0,5 pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^{2}}$. (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f . (0,25 pt)

c) Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha^{2}-1}{\alpha}$ et en donner une valeur approchée. (0,25 pt)

3.a) Donner une équation de la tangent (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\dfrac{1}{e}$. (0,25 pt)

b) Tracer (C) , (Δ) et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $2cm$.

4.a) Donner une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

b) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=1$.

Fin.