Correction du Sujet de Maths (Biologie et Géologie) :
Session 2002

Exercice 1

1) Pour tout $t \geq 0$, on a $cht \geq \frac{e^t}{2}$.

Ce qui donne que : $\frac{1}{(cht)^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}}{e^{(n+1)t}}$: intégrable au voisinage de $+\infty$.

---

2) • En posant $s = e^t$, on a : $a_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht} = \int_1^{+\infty} \frac{2}{s^2+1} ds = \frac{\pi}{2}$.

• $a_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(cht)^2} = \left[\frac{sht}{cht}\right]_0^{+\infty} = 1$.

---

3) Puisque pour tout $t \geq 0$, $\frac{1}{cht} \leq 1$, alors $a_{n+1} \leq a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

4) a) Il est clair que $cht \leq e^t$.

De plus en étudiant la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(t) = cht - 1 - \frac{t^2}{2}$,

on montre que $g(t) \leq 0$, pour tout $t \geq 0$. Par suite $1 + \frac{t^2}{2} \leq cht$.

(On peut aussi utiliser la formule de Taylor de la fonction cht).

---

b) En utilisant a) on a pour tout $t \geq 0$: $\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{n+1} \leq (cht)^{n+1} \leq e^{(n+1)t}$.

De plus d'aprés la formule du Binôme de Newton, on a :

$$\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\frac{t^2}{2}.$$

Ce qui donne le résultat.

c) En intégrant les inégalités de la question précédente, on a:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt \leq a_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(n+1)\dfrac{t^2}{2}}.$$

D'autre part, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt = \frac{1}{n+1}$.

Et en posant $s = \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\,t$, on obtient que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(n+1)\dfrac{t^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

Ainsi on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}$.

---

d) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, on en déduit

que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$.

---

5) a) En intégrant par parties, on obtient que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(cht)^{n+3}} = \left[\frac{sht}{(cht)^{n+2}}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty}\frac{(sht)^2}{(cht)^{n+3}}dt.$$

Ceci donne que $a_{n+2} = (n+1)a_n - (n+1)a_{n+2}$. D'où $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}a_n$.

b) Si $n = 2m$, on montre par itération que :

$$a_{2m} = \frac{2m-1}{2m} a_{2m-2} = ... = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} a_0 = \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \pi.$$

Si $n = 2m+1$, on montre de même par itération que :

$$a_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} a_{2m-1} = ... = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!} a_1 = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

---

6) a) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, alors d'aprés la règle de Cauchy, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$, est $R = 1$.

---

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \geq \dfrac{1}{n+1}$ et comme la série $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{n+1}$ diverge, alors $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ diverge.

D'autre part, en utilisant les inégalités de 4)c) il est clair que la suite $(a_n)_n$ décroit vers 0. Donc la série alternée $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

---

7) a) Soit $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$, pour $x \in]-1, 1[$, alors ona :

$$(1-x^2) f'(x) - x f(x) = a_1 + \sum_{n \geq 0} ((n+2) a_{n+2} - (n+1) a_n) x^{n+1}.$$

Comme $a_1 = 1$, et $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$, alors f est bien solution de

$$\begin{cases} (1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1, & si\ |x| < 1, \\ f(0) = a_0. \end{cases}$$

b) Puisque f vérifie l'équation différentielle suivante

$$(*)\begin{cases} f'(x) - \dfrac{x}{(1-x^2)}f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)}, & si\ |x|<1, \\ f(0) = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

alors $f(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt\right)\left[\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\exp\left(-\int_0^t \frac{s}{1-s^2}ds\right)dt\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\pi}{2} + Arc\sin x\right].$$

(On pourra vérifier directement que la fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\dfrac{\pi}{2} + Arc\sin x\right]$ définie sur $]-1,1[$ vérifie $(*)$. Ce qui donne le résultat d'aprés l'unicité).

---

8) a) On a pour tout $x \in]-1,1[$, $h(x) = \dfrac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ce qui donne que $\displaystyle\int_0^x h(t)dt = \frac{1}{2}(Arc\sin x)^2$, pour $x \in]-1,1[$.

---

b) En utilisant la question précédente, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(Arc\sin x)^2 = 2\int_0^x h(t)dt = 2\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

D'où d'après l'expression de a_n de la question 5)b), on obtient que :

$$(Arc\sin x)^2 = \sum_{n\geq 1}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n}, \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Exercice 2

1) On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1.$

D'où φ_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

---

b) • $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_\lambda(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx.$

En intégrant par parties, on a :

$$E(X) = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

• $\displaystyle V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$

A l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

D'où $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

(On peut aussi utiliser $\displaystyle\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$).

---

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle F(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_\lambda(x)\,dx.$

Ce qui donne que

$$F(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & si\ t \geq 0. \end{cases}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ona : $U_n = F(n+\theta) - F(n) = e^{-\lambda n}\left(1 - e^{-\lambda\theta}\right)$.

Comme $e^{-\lambda} < 1$, alors la série géomtrique $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ converge et sa somme est .

$$S = \frac{1 - e^{-\lambda\theta}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

---

3) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ona :

$$P(Y = n) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}).$$

• $E(Y) = \sum\limits_{n\geq 0} nP(Y = n) = (1 - e^{-\lambda}) \sum\limits_{n\geq 1} ne^{-\lambda n} = \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$

---

4) a) Les égalités sont triviales.

---

b) Puisque X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$P(U < t) = (P(X_1 < t))^2 = (F(t))^2.$$

D'où en utilisant 1)c), on obtient que :

$$P(U < t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2, & si\ t \geq 0. \end{cases}$$

D'autre part on a de même : $P(V \geq t) = (P(X_1 \geq t))^2 = (1 - F(t))^2$.

Ce qui donne que:

$$P(V \geq t) = \begin{cases} 1, & si\ t < 0 \\ e^{-2\lambda t}, & si\ t \geq 0. \end{cases}$$

c) • La densité de la variable aléatoire U est donnée par :

$$u(t) = \frac{d}{dt}(P(U < t)) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right), & si\ t > 0. \end{cases}$$

• La densité de la variable aléatoire V est donnée par :

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - P(V \geq t)\right) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ 2\lambda e^{-2\lambda t}, & si\ t > 0. \end{cases}$$

Exercice 3

1) On a $\det A = 0$,donc f n'est pas bijctive.

---

2) • $Ker\ f = Vect(1,1,-1)$.

• Comme $(f(e_1), f(e_2))$ forme un système libre de $\mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2$, alors

$$\operatorname{Im} f = \ Vect\,(f(e_1), f(e_2)) \ = Vect\,((0,-1,1)\ ;\ (2,5,-4))\,.$$

---

3) Le polynome caractéristique de A est donné par :

$$P_A(X) = \det(A - XI) = -X(X-1)(X-2).$$

Alors les valeurs propres de A sont 0,1 et 2.

D'autre part, en remarquant que les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, on déduit que A est diagonalisable.

---

4) On prend $B' = (u_1, u_2, u_3)$, avec :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5) La matrice de passage de B à B' est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{De plus} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

6) Puisque A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où $A^n = PD^nP^{-1}$, avec $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Ce qui donne que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2^n & 1+2^{n+1} & 1+2^n \\ 2^n & -2^{n+1} & -2^n \end{pmatrix}.$$

---

7)a) On a
$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) - 2y(t) - 2z(t) \\ v(t) &= y(t) + z(t) \\ w(t) &= -x(t) + 2y(t) + z(t). \end{aligned}$$

---

b) En utilisant les égalités suivantes

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= -2x(t) + 5y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &= 2x(t) - 4y(t) - 2z(t). \end{aligned}$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} u'(t) &= x'(t) - 2y'(t) - 2z'(t) = 0 \\ v'(t) &= y'(t) + z'(t) = y(t) + z(t) = v(t) \\ w'(t) &= -x'(t) + 2y'(t) + z'(t) = -2x(t) + 4y(t) + 2z(t) = 2w(t). \end{aligned}$$

De plus, comme $x(0) = z(0) = 0$ et $y(0) = 1$, alors $u(0) = 2$, $v(0) = -1$ et $w(0) = -2$.

c) Il est clair que $u(t) = 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'autre part, comme v est solution de l'équation différentielle :

$v'(t) - v(t) = 0$, avec $v(0) = -1$, alors $v(t) = -e^{-t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même, on a : $w(t) = -2e^{-2t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ce qui donne, en utilisant que $X(t) = PU(t)$, l'expression des fonctions x, y, z :

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 2e^{t} \\ y(t) = 2 - e^{t} - 2e^{2t} \\ z(t) = -2 + 2e^{2t}. \end{cases}$$