RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Recherche
Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2003

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve en Mathématiques I

Durée : 4 heures **Date : 6 Juin 2003** **Heure : 8H** **Nb pages : 5**
Barème : Exercice : 3,5 ; Problème : 9 – 7,5

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

1) Soit g la fonction $2\pi-$périodique définie par

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4},\ pour\ x \in [0, 2\pi[.$$

a) Déterminer la série de Fourier de g.
b) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$, on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}.$$

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x} \leq \frac{\pi}{2}$.

3) Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes qui converge vers zéro.
On pose pour $n \geq 1$,

$$u_n(x) = \begin{cases} \alpha_n \frac{\sin^2 nx}{n^2 x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour $p < q$ et $x \geq 0$, on a

$$\sum_{n=p}^{q} |u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \sup_{n \geq p} |\alpha_n|$$

b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente et que sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Problème

On désigne par E l'espace vectoriel constitué des fonctions f réelles continues et bornées sur $[0, +\infty[$ et telles que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt$ soit convergente.

Partie I

1) On considère les deux fonctions φ et ψ définies sur $[0, +\infty[$ par:

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq e, \\ \frac{1}{Logt} & \text{si } t > e. \end{cases}$$

a) Montrer que $\varphi \in E$ et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2} dt$; pour $x > 0$.

b) Montrer que $\psi \notin E$.

2) Montrer que les fonctions e^{-t} , $\sin t$ et $\cos t$ sont dans E.

3) Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$; $l \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que si $l \neq 0$, alors $f \notin E$.

c) Que peut-on dire si $l=0$?

$*$ Dans la suite , pour $f \in E$ et $x>0$, on pose $Tf(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt$.

4) On suppose que f est positive sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que la fonction Tf est décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} Tf(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt \leq +\infty$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} Tf(x)=0$.

5) Soit $f \in E$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ converge et qu'il existe deux constantes $c>0$ et $\alpha>0$ telles que pour tout $t \geq 0$; $|f(t)| \leq c\, t^{\alpha}$.

a) Montrer que pour tout $x>0$;

$$\int_0^{+\infty}\frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt-\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=-\int_0^{+\infty}\frac{f(rx)}{r(1+r^2)}dr.$$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} Tf(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$.

6) a) Montrer que $\forall x>0$ et $\forall t \geq 0$;

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2+t^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{6t}{(x^2+t^2)^2}.$$

b) En déduire que pour toute fonction $f \in E$, la fonction Tf est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x>0$,

$$(Tf)'(x)=-2x\int_0^{+\infty}\frac{tf(t)}{(x^2+t^2)^2}dt \quad \text{et} \quad (Tf)''(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{t(3x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^3}f(t)dt.$$

c) Soient $f \in E$ et $M=\displaystyle\sup_{t\geq 0}|f(t)|$. Montrer que $\forall x>0$, $|(Tf)'(x)| \leq \dfrac{M}{x}$ et $|(Tf)''(x)| \leq \dfrac{3M}{x^2}$.

7) a) Montrer que $\forall (x,t) \neq (0,0)$;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)=0.$$

- Soit $f \in E$ telle que f soit de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f'(t)}{t} = 0$.

b) En intégrant par parties, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)dt = -\frac{f(0)}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt.$$

c) En déduire que $\forall x > 0$;

$$(Tf)''(x) = \frac{f(0)}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt.$$

Partie II.

1) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Soit $f(t) = \sin t$. On pose pour $x > 0$, $v(x) = T(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2} dt$.

a) Montrer que $v(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \cos t\, dt, \ \ \forall x > 0$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} v(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

d) Montrer que $\forall x > 0$, $v''(x) - v(x) = 0$ (utiliser I-7,c).

e) En déduire que $\forall x > 0$, $v(x) = \dfrac{\pi}{2} e^{-x}$.

2) On pose pour $x > 0$, $w(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} e^{-t} dt$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = 0$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $w''(x) + w(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

c) En déduire que pour tout $x > 0$, $w'(x) = -\dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_x^{+\infty} w(t)dt$.

d) Montrer que w est l'unique fonction sur $]0,+\infty[$ vérifiant:

$$\begin{cases} w''(x) + w(x) = \dfrac{1}{x^2}, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = 0. \end{cases}$$

e) Montrer que $\forall x > 0,\ 0 < w(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$ et en déduire que w est convexe sur $]0, +\infty[$.

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 w(x) = 1$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$w(x) = -Logx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} Log(x^2 + t^2)dt.$$

c) En déduire que:

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{w(x)}{Logx} = -1$.

ii) Pour tout $x > 0$, $w'(x) = -\dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2}dr$.

d) Montrer que w est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} w(x)dx$.

4) On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par:

$h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x+t}dt$.

a) Montrer que $h(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$.

b) En déduire que h est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie

$h''(x) + h(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

c) Montrer que $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2}dt\ ,\ \ \forall x > 0$.

d) En déduire que pour tout $x > 0\ ,\ \ h(x) = w(x)$.