REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2005

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2005

Concours en Mathématiques Physique

Épreuve de Mathématiques I

Durée : 4 heures	**Date : 10 Juin 2005**	**Heure : 8 H**	**Nb pages : 5**
Barème :	**Exercice : 6 pts**	**Partie I : 7 pts**	**Partie II : 7 pts**

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Soient a un réel strictement positif et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} a - \cos x}.$$

$\boxed{\text{A}}$

1. Montrer que
$$\varphi(x) = \frac{-2e^{ix}}{(e^{ix} - e^{a})(e^{ix} - e^{-a})}.$$

2. Montrer qu'il existe une suite réelle $(\gamma_n)_{n\geq 0}$, que l'on déterminera, vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos(nx).$$

3. En déduire l'expression des intégrales
$$I_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(nx)dx,\ n \in \mathbb{N}$$

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux..

et

$$I = \int_0^{2\pi} \varphi^2(x)dx.$$

$\boxed{\text{B}}$ On suppose que φ admet un développement en série entière au voisinage de 0.

1. Établir que ce développement s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^{2p}.$$

2. Calculer b_0 et b_1.

3. En remarquant la relation

$$\varphi(x)(\text{ch}a - \cos x) = 1,$$

exprimer $b_n (n \geq 1)$ en fonction de $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$|b_n| \leq \frac{a^{-2n}}{\text{ch}a - 1}.$$

5. En déduire un minorant du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{p\geq 0} b_p x^{2p}$.

6. On pose $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.

   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\quad \cos z = \text{ch}a$.

   (b) Soit la série entière $\sum_{p\geq 0} b_p z^{2p}$ de rayon de convergence R. On note

   $$S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^{2p}.$$

      i. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ on a :

      $$S(z)(\text{ch}a - \cos z) = 1.$$

      ii. En déduire la valeur du rayon de convergence R.

Problème

Partie I

Soient x_0 un réel fixé et f une application continue de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ tels que l'application $t \mapsto f(t)e^{-tx_0}$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux..

1. (a) Montrer que pour tout $x \geq x_0$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On pose pour $x \geq x_0$:

$$L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx}dt.$$

(b) Montrer que L est continue sur $[x_0,+\infty[$.

(c) Montrer que L est de classe C^1 sur $]x_0,+\infty[$.

2. On suppose dans cette question que pour tout $x \geq x_0$, $L(x) = 0$. On introduit la fonction

$$F : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto F(t) = \int_0^t f(s)e^{-x_0 s}ds.$$

(a) Montrer que pour tout $x > x_0$, l'application $t \mapsto F(t)e^{-(x-x_0)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t}dt = 0.$$

(b) Montrer que pour tout $x > x_0$,

$$\int_0^1 F(-\ln(t))t^{x-x_0-1}dt = 0.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 F(-\ln(t))t^n dt = 0.$$

(d) Montrer que l'application $t \mapsto F(-\ln(t))$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. On notera G ce prolongement.

(e) Montrer que l'application G est nulle sur $[0,1]$ (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass).

(f) En déduire que f est nulle sur $[0,+\infty[$.

3. (a) Soient $\beta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$. Montrer que l'application

$$u \mapsto f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$.
On pose pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$,

$$h(r,\theta) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}du.$$

(b) Soit θ fixé dans $]-\beta,\beta[$. Montrer que l'application $r \mapsto h(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

(c) Soit r fixé dans $]0,+\infty[$. Montrer que l'application $\theta \mapsto h(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $]-\beta,\beta[$.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

(d) Vérifier que, $\forall\ (r,\theta) \in\ ]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$,

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) - ir\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = 0.$$

Partie II

Dans la suite du problème on appelle série de **Dirichlet** toute série de la forme $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ où z appartient à $\mathbb{C}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs complexes et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels **positifs, strictement croissante** et **non majorée**.

Pour toute série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$, on désigne par

$$D_c = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge }\}.$$

$$D_a = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge absolument }\}.$$

On définit l'abscisse de convergence σ_c et l'abscisse de convergence absolue σ_a par :

$$\sigma_c = \inf D_c \quad \text{et} \quad \sigma_a = \inf D_a.$$

On convient que :

$$\text{si } D_c = \emptyset, \text{ alors } \sigma_c = +\infty \text{ et si } D_a = \emptyset, \text{ alors } \sigma_a = +\infty.$$

A

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c et d'abscisse de convergence absolue σ_a.

   (a) Montrer que $\sigma_c \leq \sigma_a$.

   (b) Montrer que si a_n est réel positif pour tout $n \geq 1$, alors $\sigma_c = \sigma_a$.

2. (a) Soit la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} e^{-\ln(n)z}$. Déterminer son abscisse de convergence σ_c et son abscisse de convergence absolue σ_a.

   (b) Soit la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-\ln(n)z}$. Déterminer son abscisse de convergence σ_c et son abscisse de convergence absolue σ_a.

3. Soit la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\ln(n)z}$ où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes.

   (a) Montrer que si pour un réel x, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ converge, alors pour tout $\epsilon > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}}$ converge absolument.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

(b) Montrer alors que :

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1.$$

4. Soit une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$. On suppose que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(n)}{\lambda_n} = b \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$\forall\, n \geq n_0,\ \lambda_n \geq \frac{1}{b+\epsilon}\ln(n).$$

   (b) Soit x un réel tel que la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge. soient $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$ converge absolument où $x' = x+(1+\alpha)(b+\epsilon)$.

   (c) Montrer que

   $$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + b.$$

$\boxed{\text{B}}$ Soit $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue σ_a finie.

1. Montrer que pour tout $x > \sigma_a$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge absolument.

   On pose pour $x \in]\sigma_a, +\infty[$, $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$.

2. Montrer que g est continue sur $]\sigma_a, +\infty[$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > \sigma_a$, où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

   Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge absolument.

4. Soient $x_0 > \sigma_a$ et $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
   On pose pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$,

   $$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}.$$

   (a) Soit θ fixé dans $]-\beta,\beta[$. Montrer que l'application $r \mapsto f(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

   (b) Soit r fixé dans $]0,+\infty[$. Montrer que l'application $\theta \mapsto f(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $]-\beta,\beta[$.

   (c) Vérifier que, $\forall\ (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$,

   $$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) - ir\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = 0.$$

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux..