REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de La Recherche Scientifique et de La Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2008

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2008

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date : 02 Juin 2008	**Heure :** 8 H	**Durée :** 4 heures	**Nb pages :** 4	
Barème :	**Partie I :** 3 pts	**Partie II :** 8 pts	**Partie III :** 4 pts	**Partie IV :** 5 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Notations

- Étant donné une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent. Dans ce cas, on note

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

- Si f est une fonction d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ p fois dérivable ($p \in \mathbb{N}^*$), on note $f^{(p)}$ la fonction dérivée p-ème de f. On note également $f^{(0)} = f$.

Partie I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et **intégrable** sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to f(t)\exp(-itx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors la fonction
   $$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-itx)dt$$
   appelée la transformée de Fourier de f.
2. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout entier $p \in \{1, ..., k\}$, la fonction

$$f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \longmapsto t^p f(t)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier $p \in \{1, ..., k\}$

$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. (a) On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

(ii) En déduire que

$$\mathcal{F}(f')(x) = ix\mathcal{F}(f)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que $f', ..., f^{(k)}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier $p \in \{1, ..., k\}$

$$\mathcal{F}\left(f^{(p)}\right)(x) = (ix)^p \mathcal{F}(f)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Partie II

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et telles que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n f^{(m)}(x) = \lim_{x \to -\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0.$$

Dans toute cette partie f désigne un élément de $\mathcal{S}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}\left(f^{(p)}\right)(x) = (ix)^p \mathcal{F}(f)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$.

2. (a) Montrer que pour tout $h > 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(nh)$ est absolument convergente.

(b) Montrer que pour tout $h > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} h \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh))\,dt.$$

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) \right| \leq h \int_0^{+\infty} |f'(x)|\,dx$$

(c) Montrer alors que

$$\lim_{h \to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(d) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(-nh)$ est absolument convergente et que

$$\lim_{h \to 0^+} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} hf(nh) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3. Soit T un réel strictement positif.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)$ est convergente. On pose alors

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+nT) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x).$$

   (c) Montrer que f_T est de classe C^1 et T-périodique.

4. On pose

$$c_n(f_T) = \tfrac{1}{T}\int_0^T f_T(x)\exp\left(\tfrac{-2i\pi n x}{T}\right)dx,$$

le n-ième coefficient de Fourier exponentiel de f_T.

   (a) Montrer que

$$c_n(f_T) = \tfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\mathcal{F}(f)\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right).$$

   (b) En déduire que

$$f_T(x) = \tfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f)\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right)\exp\left(\tfrac{2i\pi n x}{T}\right) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5. Déduire des précédentes questions la formule d'inversion

$$(1) \qquad \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Partie III

Soit φ_0 la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que φ_0 est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que φ_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que sa dérivée *n-ième* s'exprime sous la forme

$$\varphi_0^{(n)}(x) = R_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\tfrac{-1}{x}\right) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}$$

   où R_n est un polynôme de degré $2n$.

   (c) Montrer que φ_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit $b \in]1,+\infty[$.

2. Montrer que la fonction

$$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi_0\left(x - \tfrac{1}{b}\right)\varphi_0(b-x)$$

est de classe C^∞, qu'elle prend des valeurs strictement positives sur $\left]\frac{1}{b}, b\right[$ et nulle ailleurs.

3. On pose $\psi_b = \mathcal{F}(g)$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_0(-x)$.

   (a) Vérifier que la fonction $\psi_b \in \mathcal{S}$.

   (b) En utilisant la formule d'inversion (1), montrer que

      (i) Sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\psi_b)$ est strictement positive sur $\left]\frac{1}{b}, b\right[$ et nulle ailleurs.

      (ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi_b(t)\, dt = \sqrt{2\pi}\; i^k \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(g^{(k)}\right)\right)(0) = 0.$$

$\boxed{\text{Partie IV}}$

Soit $b \in \left]1, +\infty\right[$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   On définit alors la fonction ‹‹ de type Weierstrass ››

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que la fonction W est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

   Si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$C_p(x) = (2\pi b^p)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\, \psi_b(2\pi b^p (t - x))\, dt.$$

   où ψ_b est la fonction construite à la fin de la partie III.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que la définition de $C_p(x)$ a bien un sens.

   (b) En utilisant une intervertion série-intégrale, montrer que

$$C_p(x) = \tfrac{1}{2} b^p (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{b^n} \mathcal{F}(\psi_b)\left(b^{n-p}\right).$$

   (c) En déduire que

$$|C_p(x)| = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}(\psi_b)(1).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que W est dérivable en x.

   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{h \to 0^+} \varepsilon_x(h) =$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$W(x + h) = W(x) + hW'(x) + h\varepsilon_x(h).$$

   (b) Montrer que

$$C_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s\, \varepsilon_x\left(\tfrac{s}{2\pi b^p}\right) \psi_b(s)\, ds \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

   (c) En déduire que $\lim_{p \to +\infty} C_p(x) = 0$.

5. Montrer que W n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.