

Correction du sujet Math 1(Maths-Physique): Session 2002

Partie I

1) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1-\alpha}{2}} f(x) = 0$ et $\frac{1-\alpha}{2} < 1$, donc f est intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

2)a) En étudiant l'application $t \rightarrow \text{Log}(1-t) + t$, on obtient l'inégalité.

b) En utilisant la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]0, n]$,

$$\text{Log}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = n \text{Log}\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x.$$

Ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

3) On a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x > 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et f intégrable au voisinage sur $]0, +\infty[$, alors d'après le théorème de convergence dominée on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

4)a) En posant $u = 1 - \frac{x}{n}$, on obtient:

$$\begin{aligned} I_n &= n \int_0^1 u^n \text{Log}(n(1-u)) du \\ &= \frac{n}{n+1} \text{Log} n + n \int_0^1 u^n \text{Log}(1-u) du. \end{aligned}$$

b) On a $\text{Log}(1-u) = -\sum_{p \geq 1} \frac{u^p}{p}$, pour $|u| < 1$.

Alors en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient:

$$\int_0^1 u^n \text{Log}(1-u) du = - \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \int_0^1 u^{p+n} du = - \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p(p+n+1)}.$$

c) On a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^n \text{Log}(1-u) du &= -\frac{1}{1+n} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+n+1} \right) \\ &= -\frac{1}{1+n} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} - \sum_{p=n+2}^{N+n+1} \frac{1}{p} \right) \\ &= -\frac{1}{1+n} \left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=N+1}^{N+n+1} \frac{1}{p} \right) \\ &= -\frac{1}{1+n} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

car $\frac{1}{1+n} \sum_{p=N+1}^{N+n+1} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{N+n+1}$.

Ainsi

$$I_n = \frac{n}{n+1} \text{Log} n + n \int_0^1 u^n \text{Log}(1-u) du = \frac{n}{1+n} \left(\text{Log} n - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \right).$$

5) D'après I-3), on a:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \text{Log} x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Log} n - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right).$$

6) On a: $\frac{1}{n} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$, donc $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ converge. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \text{Log}(1+n) + \text{Log}n \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \text{Log}(1+N) \right). \end{aligned}$$

C'est à dire la constante d'Euler $\gamma = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$.

7)a) On a:

$$x^2 \int_0^1 \frac{t}{1+tx} dt = x \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+tx} \right) dt = x - \text{Log}(1+x).$$

b) Comme pour tout $t \in [0, 1]$, on a:

$$\frac{t}{1+t} \leq \frac{t}{1+\frac{t}{n}} \leq t.$$

Il s'ensuit, d'après la question précédente, que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$(1 - \text{Log}2) \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{t}{1+\frac{t}{n}} dt \leq \frac{1}{2n^2}.$$

c) Les inégalités sont triviales.

Partie II

1)a) En intégrant par parties, on a pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = [t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

b) La fonction $x \rightarrow t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. De plus, si $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall x \in [a, b]$ et $t \geq 0$ on a:

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} (t^{x-1}e^{-t}) \right| = |t^{x-1}e^{-t} (\text{Log}t)^n| \leq \varphi_{a,b}(t),$$

où $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} |\text{Log}t|^n & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} |\text{Log}t|^n & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Il en résulte, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall n \geq 1$ et $x > 0$, on a:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} (\text{Log}t)^n dt.$$

c) On a $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \text{Log}t dt = \gamma$.

2)a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} (\Gamma'(x))^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right) \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \text{Log}t \right) dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right)^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \text{Log}t \right)^2 dt \right) \\ &= \Gamma(x) \cdot \Gamma''(x). \end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, on a pour tout $x > 0$,

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)'(x) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0.$$

Donc la fonction Γ est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$.

3)a) Pour tout $x > 0$, on a:

$$\frac{g'(x+1)}{g(x+1)} = \frac{xg'(x) + g(x)}{xg(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{1}{x}.$$

b) Pour tout $x > 0$, on a:

$$h(x+1) = \frac{g(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{xg(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{g(x)}{\Gamma(x)} = h(x).$$

c) Pour tout $x > 0$, on a: $h(x+1) = h(x)$. En dérivant, on obtient $h'(x+1) = h'(x), \forall x > 0$. C'est à dire, h' est 1-périodique.

4)a) Comme Γ et g sont logarithmiquement convexes, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$, on a:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \leq \frac{g'(n+1)}{g(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

Maintenant, en utilisant la question II-3)a) et le fait que h est 1-périodique, on obtient:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} \leq \frac{g'(n)}{g(n)} + \frac{1}{n} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{h'(n)}{h(n)} + \frac{1}{n} = \frac{h'(1)}{h(1)} + \frac{1}{n}.$$

b) En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$, on a:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} \geq \frac{g'(n)}{g(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{h'(n)}{h(n)} - \frac{1}{n} = \frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{1}{n}.$$

c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$ on a:

$$\frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{1}{n} \leq \frac{h'(x)}{h(x)} \leq \frac{h'(1)}{h(1)} + \frac{1}{n},$$

alors en faisant tendre x vers $+\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{h'(1)}{h(1)}$.

5)a) Soit $x > 0$, alors en utilisant que $\frac{h'}{h}$ est 1-périodique sur $]0, +\infty[$, on obtient:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h'(x+n)}{h(x+n)} = \frac{h'(1)}{h(1)}.$$

C'est à dire, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $h'(x) = C.h(x)$, $\forall x > 0$.
Ce qui implique que $\forall x > 0$, $h(x) = K.e^{Cx}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Comme h est 1-périodique sur $]0, +\infty[$, alors $C = 0$ et donc h est constante.

b) découle immédiatement de la question précédente.

6)a) En intégrant par parties, on a pour $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} B(x+1, y) &= -\frac{1}{y} [t^x (1-t)^y]_0^1 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \frac{x}{y} B(x, y+1). \end{aligned}$$

b) Pour $x, y > 0$, on a:

$$\begin{aligned} B(x+1, y) + B(x, y+1) &= \int_0^1 ((1-t) + t) t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= B(x, y). \end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente, on a:

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1) = \frac{x}{y} (B(x, y) - B(x+1, y)).$$

Ainsi

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y+x} B(x, y).$$

7)a) Pour $y > 0$ fixé, on pose $g(x) = B(x, y) \cdot \Gamma(x + y)$, alors en utilisant les propriétés des fonctions Γ et B , on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= B(x+1, y) \cdot \Gamma(x+y+1) \\ &= \frac{x}{y+x} B(x, y) \cdot (x+y) \Gamma(x+y) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

C'est à dire que g vérifie (*). De plus, on a:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} B(x, y)}{B(x, y)} + \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}.$$

D'après II-2), Γ est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$. De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy Shawartz, on montre d'une manière analogue que l'application $x \rightarrow B(x, y)$ est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$. Il en résulte que g est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$.

b) Comme g est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$ vérifiant (*), alors d'après la question II-5), on a $g(x) = g(1)\Gamma(x), \forall x > 0$.

Or,

$$g(1) = B(1, y)\Gamma(y+1) = y\Gamma(y) \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \Gamma(y).$$

Donc on a:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \forall x, y > 0.$$

c) En prenant $x = y = \frac{1}{2}$ dans l'égalité précédente, on a:

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 &= \Gamma(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds \\ &= 2 \text{Arcsin} 1 = \pi. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

8)a) On pose $g(x) = 2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$, pour $x > 0$.

On a g vérifie (*). En effet, pour tout $x > 0$ on a:

$$\begin{aligned} g(x+1) &= 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right) \\ &= 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$, on a:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \text{Log}2 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{x}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right)}.$$

Comme Γ est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$, alors g l'est aussi.

b) D'après II-5), on a pour tout $x > 0$,

$$g(x) = 2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = g(1) \Gamma(x).$$

C'est à dire:

$$g(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) \Gamma(x) = \sqrt{\pi} \Gamma(x), \forall x > 0.$$

9)a) En appliquant la fonction Log à l'égalité suivante:

$$2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(x),$$

puis, en intégrant entre 0 et 1, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Log} \Gamma(t) dt + \text{Log} \sqrt{\pi} &= \text{Log} 2 \int_0^1 (t-1) dt + \int_0^1 \text{Log} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) dt + \int_0^1 \text{Log} \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \text{Log} 2 + 2 \int_0^1 \text{Log} \Gamma(t) dt. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\int_0^1 \text{Log}\Gamma(t)dt = \text{Log}\sqrt{2\pi}$.

b) On pose pour $x > 0$, $v(x) = \int_x^{x+1} \text{Log}\Gamma(t)dt - x\text{Log}x + x$.
Alors on a pour $x > 0$,

$$v'(x) = \text{Log}\left(\frac{\Gamma(x+1)}{x\Gamma(x)}\right) = 0.$$

Donc pour tout $x > 0$, on a: $v(x) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = \int_0^1 \text{Log}\Gamma(t)dt = \text{Log}\sqrt{2\pi}$. Ce qui donne le résultat.

Partie III

1)a) L'égalité est triviale.

b) Soit $u_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}$, pour $x > 0$. La fonction $x \rightarrow u_n(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\sup_{x \in]0, +\infty[} |u'_n(x)| = \sup_{x \in]0, +\infty[} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum u'_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$. Ce qui montre que $u = \sum u_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$u'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+x)^2}, \text{ pour } x > 0.$$

c) On a: $xu(x) = x(x-1) \left[\frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+x)} \right]$, pour $x > 0$.

Comme $\frac{1}{(n+1)(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xu(x) = -1.$$

Comme $u'(x) \geq 0$, alors u est croissante et positive sur $[1, +\infty[$. Donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ existe au sens large.

Soit N un entier fixé et $x > 1$, alors on a:

$$u(x) \geq \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right).$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}$$

Maintenant, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

Comme pour $x > 0$, on a:

$$|u'(x)| \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^{3/2}}$$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^{3/2}} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0$.

2)a) Pour tout $x > 0$, on a:

$$\begin{aligned} u(x+1) - u(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{N+x+1} \right) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

b) Comme $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, 2]$, alors on a:

$$\begin{aligned} \int_1^2 u(t) dt &= \sum_{n \geq 0} \int_1^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t} \right) dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n+1} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right] = \gamma. \end{aligned}$$

c) Soit $h(x) = \int_x^{x+1} u(t) dt$, pour $x > 0$. Alors on a:

$$h'(x) = u(x+1) - u(x) = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que pour tout $x > 0$,

$$h(x) = \text{Log} x + h(1) = \text{Log} x + \int_1^2 u(t) dt = \text{Log} x + \gamma.$$

3) Soit $g(x) = \exp\left(\int_1^x (u(t) - \gamma) dt\right)$, pour $x > 0$. Alors g vérifie (*). En effet, d'après la question précédente, on a pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= g(x) \cdot \exp\left(\int_x^{x+1} (u(t) - \gamma) dt\right) \\ &= g(x) \cdot \exp(\text{Log}x + \gamma - \gamma) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

De plus, $\left(\frac{g'}{g}\right)'(x) = u'(x) \geq 0, \forall x > 0$. Donc g est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$. Ainsi, d'après II-5), on a pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x)$. Ce qui donne (i).
L'égalité (ii) est facile à vérifier.