

Concours en Mathématiques Physique  
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Exercice 29 pb

A 10 pb

2. 1. En partant de  $\frac{-2e^{ix}}{(e^{ix} - e^a)(e^{ix} - e^{-a})}$ , on vérifie la formule demandée.

2. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{-2X}{(X - e^a)(X - e^{-a})}$  et en utilisant Question 1) on obtient

$$\varphi(x) = \frac{1}{sha} \left\{ \frac{1}{1 - e^{ix}e^{-a}} + \frac{e^{-a}e^{-ix}}{1 - e^{-ix}e^{-a}} \right\}.$$

Donc, puisque  $|e^{\pm ix}e^{-a}| = e^{-a} < 1$ , on aura

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{sha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{inx}e^{-na} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-inx}e^{-na} \right\} \\ &= \frac{1}{sha} + \frac{2}{sha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} \cos(nx). \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{2}{sha} e^{-na} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{sha} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

3. Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $|e^{-na} \cos(nx)| \leq e^{-na}$  alors la série  $\sum_{n \geq 1} e^{-na} \cos(nx)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ , il s'en suit que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{sha} + \frac{2}{sha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ka} \cos(kx) \right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{sha} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \frac{2}{sha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ka} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$



Or pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi & \text{si } k = n \end{cases}$$

Donc, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx = \frac{2\pi}{\text{sha}} e^{-na}.$$

La fonction  $\varphi$  est continue, paire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Ses coefficients de Fourier trigonométriques sont donc pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\text{sha}} e^{-na} \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

On applique la formule de Parseval à  $\varphi$  on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(x) dx &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \\ &= \frac{1}{\text{sh}^2 a} + \frac{2}{\text{sh}^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2na} \\ &= \frac{\text{cha}}{\text{sh}^3 a}. \end{aligned}$$

Donc

$$I = 2\pi \frac{\text{cha}}{\text{sh}^3 a}.$$

---

**B** 19 points

---

1. La fonction  $\varphi$  est paire donc son développement éventuel est de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^{2p}.$$

2.  $b_0 = \varphi(0) = \frac{1}{\text{cha} - 1}.$

$$b_1 = \frac{\varphi''(0)}{2} = -\frac{1}{2}(\text{cha} - 1)^{-2}.$$

3. On a

$$\text{cha} - \cos x = \text{cha} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En utilisant l'égalité

$$\varphi(x)(\text{cha} - \cos x) = 1,$$

Le produit de Cauchy de ce deux séries donne

$$b_0(\text{cha} - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\text{cha} - 1)b_n + \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} b_{n-p} \right\} x^{2n} = 1.$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$b_n = \frac{1}{\text{cha} - 1} \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{(2p)!} b_{n-p}.$$

4. On a  $b_0 = \frac{1}{\text{cha} - 1}$ , donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ . Supposons qu'elle est vraie jusqu'à un certain ordre  $n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \frac{1}{\text{cha} - 1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)!} |b_{n-p}| \\ &\leq \frac{1}{(\text{cha} - 1)^2} \sum_{p=1}^n \frac{a^{-2(n-p)}}{(2p)!} \\ &\leq \frac{a^{-2n}}{(\text{cha} - 1)^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^{2p}}{(2p)!} \\ &\leq \frac{a^{-2n}}{(\text{cha} - 1)^2} (\text{cha} - 1) = \frac{a^{-2n}}{\text{cha} - 1} \end{aligned}$$

5. Le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a^{-2n}}{\text{cha} - 1} x^{2n}$$

est  $a$ , donc  $R \geq a$ .

6. (a) On pose  $X = e^{iz}$ . L'équation  $\cos z = \text{cha}$  est équivalente à

$$X^2 - 2\text{cha}X + 1 = 0,$$

dont les solutions sont  $X_1 = e^a$  et  $X_2 = e^{-a}$ . On pose  $z = x + iy$ , on obtient

$$e^{iz} = e^{\pm a} \Leftrightarrow e^{ix} e^{-y} = e^{\pm a} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm a \\ x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{z = 2k\pi \pm ia, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) i. En utilisant la relation

$$b_n = \frac{1}{cha - 1} \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} b_{n-p},$$

et le produit de Cauchy des deux séries  $1 + \sum_{p \geq 1} b_p z^{2p}$  et  $cha - 1 + \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p+1} z^{2p}}{(2p)!}$ ,  
on obtient la formule demandée.

ii. Pour  $z = ia$ , on a  $\cos z = cha$ , donc

$$\lim_{|z| \rightarrow a} |S(z)| = +\infty.$$

La série  $\sum_{p \geq 0} b_p z^{2p}$  est donc divergente pour  $z = ia$ , ce qui donne  $R \leq a$ .  
D'où  $R = a$ .

### Problème

#### Partie I 35 p k

1. (a) On a  $t \mapsto |f(t)|e^{-tx}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . En plus  $\forall x \geq x_0$ ,  
 $|f(t)|e^{-tx} \leq |f(t)|e^{-tx_0}$  qui est intégrable sur  $[0, +\infty[$  donc  $t \mapsto |f(t)|e^{-tx}$  est  
intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

(b) On pose

$$g(x, t) = f(t)e^{-tx}.$$

On a :

$g$  est continue sur  $]x_0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

$\forall (x, t) \in ]x_0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,

$$|g(x, t)| \leq |f(t)|e^{-tx_0}$$

L'application  $t \mapsto |f(t)|e^{-tx_0}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Donc  $L$  est continue sur  $]x_0, +\infty[$ .

(c) On a :

$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt}$  est continue sur  $]x_0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

Soit  $a > x_0$ , pour tout  $(x, t) \in ]a, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t|f(t)|e^{-at} \leq |f(t)|e^{-x_0 t} t e^{(x_0 - a)t}$$

or  $t \mapsto te^{(x_0-a)t}$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ , donc il existe  $M$  tel que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq M|f(t)|e^{-x_0 t}$$

$t \mapsto |f(t)|e^{-tx_0}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $L$  est de classe  $C^1$  sur  $]x_0, +\infty[$ .

---

2. (a) Soit  $x > 0$ . On a  
 $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .  
Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$|F(t)| \leq \int_0^{+\infty} |f(s)|e^{-x_0 s} ds = C$$

d'où

$$|F(t)e^{-(x-x_0)t}| \leq Ce^{-(x-x_0)t}.$$

Or l'application  $t \mapsto Ce^{-(x-x_0)t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Donc  $t \mapsto F(t)e^{-(x-x_0)t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

D'autre part par intégration par partie on trouve

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t} dt = \frac{1}{x-x_0} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \frac{1}{x-x_0} L(x) = 0.$$

---

- (b) On fait le changement de variable  $t = -\ln(s)$  dans l'intégrale  $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t} dt$   
on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t} dt = \int_0^1 F(-\ln(s))e^{(x-x_0)\ln(s)} \frac{1}{s} ds \\ &= \int_0^1 F(-\ln(s))s^{x-x_0-1} ds \end{aligned}$$

---

- (c) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $x = x_0 + 1 + n > x_0$ . On obtient alors

$$= \int_0^1 F(-\ln(s))s^n ds = 0$$

---

- (d)  $t \mapsto -\ln(t)$  est continue sur  $]0, 1]$  et à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , en plus  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc  $t \mapsto F(-\ln(t))$  est continue sur  $]0, 1]$ .

En plus  $\lim_{t \rightarrow 0} (-\ln(t)) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-x_0 s} ds = 0$ .

Donc  $\lim_{t \rightarrow 0} F(-\ln(t)) = 0$  et ainsi  $t \mapsto F(-\ln(t))$  est prolongeable par continuité en 0.

---

- (e) La fonction  $G$  est continue sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de Weirstrass il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions polynomiales qui converge uniformément

sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $G$ .  
 D'autre part, d'après (d),  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a

$$\int_0^1 G(t) \bar{P}_n(t) dt = 0.$$

La suite de fonctions  $(G \bar{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $|G|^2$ .

D'où :

$$0 = \int_0^1 G(t) \bar{P}_n(t) dt \longrightarrow \int_0^1 |G(t)|^2 dt \text{ quand } n \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \int_0^1 |G(t)|^2 dt = 0 \\ |G(t)|^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \\ G^2 \text{ est continue sur } [0, 1]. \end{cases}$$

donc  $G$  est nulle sur  $[0, 1]$ .

(f)  $G$  est nulle sur  $[0, 1]$  donc  $F$  est nulle sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi la fonction  $F'$  est nulle sur  $[0, +\infty[$  d'où la fonction  $f$  est nulle sur  $[0, +\infty[$ .

3. (a) On a :

$$|f(u)e^{-u(x_0 + re^{i\theta})}| = |f(u)e^{-u(x_0 + r \cos(\theta))}|.$$

Or  $\forall (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$  on a :  $r \cos(\theta) > 0$ , d'où

$$|f(u)e^{-u(x_0 + re^{i\theta})}| \leq |f(u)e^{-ux_0}|$$

qui est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

D'où la fonction  $u \mapsto f(u)e^{-u(x_0 + re^{i\theta})}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

(b)  $\theta$  fixé dans  $] -\beta, \beta[$ .

On pose

$$g(r, u) = f(u)e^{-u(x_0 + re^{i\theta})}.$$

On a :

$g$  est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

$\forall (r, u) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,

$$|g(r, u)| \leq |f(u)e^{-x_0 u}|$$

qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

$\frac{\partial g}{\partial r}(r, u) = -e^{i\theta} u f(u) e^{-u(x_0 + re^{i\theta})}$  qui est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .  $\forall (r, u) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r}(r, u) \right| \leq |f(u)| e^{-ux_0} u e^{-ua \cos(\theta)}.$$

La fonction  $u \mapsto ue^{-ua \cos(\theta)}$  est bornée sur  $]0, +\infty[$  donc il existe  $M$  tel que  $\forall u \in ]0, +\infty[$ , on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r}(r, u) \right| \leq M |f(u)| e^{-uz_0}$$

qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

En conclusion  $r \mapsto h(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \int_0^{+\infty} -e^{i\theta} u f(u) e^{-u(x_0 + r e^{i\theta})} du.$$

(c)  $r$  fixé dans  $]0, +\infty[$ .

On pose

$$k(\theta, u) = f(u) e^{-u(x_0 + r e^{i\theta})}.$$

On a :

$k$  est continue sur  $] -\beta, \beta[ \times ]0, +\infty[$ .

$\forall (\theta, u) \in ] -\beta, \beta[ \times ]0, +\infty[$ ,

$$|k(\theta, u)| \leq |f(u)| e^{-x_0 u}$$

qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

$\frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta, u) = -i u r e^{i\theta} f(u) e^{-u(x_0 + r e^{i\theta})}$  qui est continue sur  $] -\beta, \beta[ \times ]0, +\infty[$ .

L'application  $u \mapsto u e^{-ur \cos \beta}$  est bornée par une constante  $\tilde{M}$ .

$\forall (\theta, u) \in ] -\beta, \beta[ \times ]0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta, u) \right| \leq r u |f(u)| e^{-u(x_0 + r \cos(\beta))}$$

$$\leq \tilde{M} r |f(u)| e^{-x_0 u}$$

qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

En conclusion  $\theta \mapsto h(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\beta, \beta[$  et

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = \int_0^{+\infty} -i r e^{i\theta} u f(u) e^{-u(x_0 + r e^{i\theta})} du.$$

(d) D'après (b) et (c) On a :  $\forall (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ] -\beta, \beta[$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) - i r \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta)$$

$$= -i r e^{i\theta} \int_0^{+\infty} u f(u) e^{-u(x_0 + r e^{i\theta})} du + i r e^{i\theta} \int_0^{+\infty} u f(u) e^{-u(x_0 + r e^{i\theta})} du = 0.$$

A *de p/b*

1. (a) On sait que si pour  $x$  réel  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$  converge absolument alors elle est convergente. D'où

$$D_a \subset D_c$$

et ainsi

$$\sigma_c \leq \sigma_a.$$

- (b) Si  $a_n$  est réel positif, alors

$$D_a = D_c$$

et ainsi

$$\sigma_c = \sigma_a.$$

2. (a) D'abord  $a_n = 1$  réel positif donc  $\sigma_c = \sigma_a$ . D'autre part pour  $x$  réel,  $e^{-\ln(n)x} = \frac{1}{n^x}$ , ainsi  $\sum_{n \geq 1} e^{-\ln(n)x}$  converge ssi  $x > 1$ . D'où  $D_a = D_c = ]1, +\infty[$  et donc  $\sigma_c = \sigma_a = 1$ .

- (b) Pour  $x$  réel, on a :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{-\ln(n)x} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge absolument si et seulement si  $x > 1$ . D'où

$$\sigma_a = 1.$$

D'autre part, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge si et seulement si  $x > 0$ .

D'où  $D_c = ]0, +\infty[$  et par suite

$$\sigma_c = 0.$$

3. (a) Soient  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x}$  converge et  $\epsilon > 0$ .

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^x} = 0.$$

D'où il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ , on a  $|\frac{a_n}{n^x}| \leq 1$ .

Ainsi pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}}.$$

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$  converge d'où  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}}$  converge absolument.

---

(b) On a déjà montré que  $\sigma_c \leq \sigma_a$ .

D'autre part, d'après la question précédente on a, pour  $\epsilon > 0$ ,

$$\{x + \epsilon + 1 \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge}\} \subset$$

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge absolument}\}$$

d'où

$$\sigma_a \leq \inf\{x + \epsilon + 1 \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge}\}$$

ainsi

$$\sigma_a \leq \sigma_c + 1 + \epsilon \text{ pour tout } \epsilon > 0$$

et enfin

$$\sigma_a \leq \sigma_c + 1.$$

---

4. (a) On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\lambda_n} = b.$$

Alors, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a

$$\left| \frac{\ln(n)}{\lambda_n} - b \right| \leq \epsilon.$$

D'où

$$b - \epsilon \leq \frac{\ln(n)}{\lambda_n} \leq b + \epsilon \text{ pour tout } n \geq n_0$$

et donc

$$\lambda_n \geq \frac{1}{b + \epsilon} \ln(n) \text{ pour tout } n \geq n_0$$

---

(b) On a  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$  converge d'où la suite  $(|a_n e^{-\lambda_n x}|)_n$  est bornée donc il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n e^{-\lambda_n x}| \leq M.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n e^{-\lambda_n x'}| \leq M e^{-(1+\alpha)(b+\epsilon)\lambda_n}.$$

Ce qui donne d'après (a)

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, |a_n e^{-\lambda_n x'}| &\leq M e^{-(1+\alpha)\ln(n)} \\ &\leq M \frac{1}{n^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^{\alpha+1}}$  converge donc  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$  converge absolument.

---

(c) On a déjà  $\sigma_c \leq \sigma_a$  (d'après 1.).

D'autre part, d'après la question précédente on a, pour  $\epsilon > 0$  et  $\alpha > 0$ ,

$$\{x + (\epsilon + b)(\alpha + 1) \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge}\} \subset$$

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge absolument}\}$$

d'où

$$\sigma_a \leq \inf\{x + (\epsilon + b)(\alpha + 1) \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge}\}$$

ainsi

$$\sigma_a \leq \sigma_c + (\epsilon + b)(\alpha + 1) \text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

et enfin

$$\sigma_a \leq \sigma_c + b.$$

---

**B** 16 points

---

1. Soit  $x > \sigma_a$ . Comme  $\sigma_a = \inf D_a$ , il existe  $x' \in D_a$  tel que  $\sigma_a \leq x' < x$ . On a alors  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$  converge absolument.

D'autre part

$$|a_n e^{-\lambda_n x}| = |a_n| e^{-\lambda_n x'} e^{-\lambda_n (x-x')} \leq |a_n| e^{-\lambda_n x'}.$$

Or la série  $\sum_{n \geq 1} |a_n| e^{-\lambda_n x'}$  converge donc la série  $\sum_{n \geq 1} |a_n e^{-\lambda_n x}|$  converge aussi.

2. On pose

$$g_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x}.$$

On a

$g_n$  est continue sur  $]\sigma_a, +\infty[$ .

Soit  $b > \sigma_a$ .

$$\sup_{x \in [b, +\infty[} |g_n(x)| = |a_n| e^{-\lambda_n b}.$$

Or la série  $\sum_{n \geq 1} |a_n| e^{-\lambda_n b}$  converge (car  $b > \sigma_a$ ) donc la série  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge normale-

ment et par suite uniformément sur  $[b, +\infty[$ .

D'où  $g$  est continue sur  $]\sigma_a, +\infty[$ .

3.

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n e^{-\lambda_n \Re(z)}|$$

or  $\Re(z) > \sigma_a$  donc d'après la question 1. la série  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n \Re(z)}$  converge absolument.

D'où la série  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$  converge absolument.

4. (a) Pour  $\theta$  fixé dans  $] -\beta, \beta[$ , on pose

$$f_n(r) = a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}.$$

On a :

$f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$f'_n(r) = -\lambda_n e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}.$$

Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \sup_{r \in [a, b]} |f'_n(r)| &= |\lambda_n| |a_n| e^{-\lambda_n(x_0 + a \cos(\theta))} \\ &= |\lambda_n| e^{-\lambda_n a \cos(\theta)} |a_n| e^{-\lambda_n x_0} \end{aligned}$$

D'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n a \cos(\theta)} = 0$  donc la suite  $\lambda_n e^{-\lambda_n a \cos(\theta)}$  est bornée.

D'où il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n e^{-\lambda_n a \cos(\theta)} \leq M$$

Il vient que :

$$\sup_{r \in [a, b]} |f'_n(r)| \leq M |a_n| e^{-\lambda_n x_0}$$

et comme  $\sum_{n \geq 1} |a_n| e^{-\lambda_n x_0}$  converge, on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement et par suite uniformément sur tout compact  $C \subset ]0, +\infty[$ .

On a aussi la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

En conclusion l'application  $r \mapsto f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}$$

(b) Pour  $r$  fixé dans  $]0, +\infty[$ , on pose

$$h_n(\theta) = a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}.$$

On a :  $h_n$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\beta, \beta[$  et

$$h'_n(\theta) = -i \lambda_n r e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}.$$

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in ]-\beta, \beta[} |h'_n(\theta)| &= r |\lambda_n| |a_n| e^{-\lambda_n x_0} e^{-\lambda_n r \cos(\beta)} \\ &\leq M |a_n| e^{-\lambda_n x_0} \end{aligned}$$

car la suite  $(r \lambda_n e^{-\lambda_n r \cos(\beta)})_n$  est une suite bornée ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} r \lambda_n e^{-\lambda_n r \cos(\beta)} = 0$ ).

D'où la série  $\sum_{n \geq 1} h'_n$  converge uniformément sur  $] -\beta, \beta[$ .

D'autre part la série  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge simplement sur  $] -\beta, \beta[$ .

En conclusion l'application  $\theta \mapsto f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\beta, \beta[$  et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} -i \lambda_n r e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0 + r e^{i\theta})}$$

---

(c) D'après (a) et (b) on a :

2

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) - ir \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = 0.$$