

Partie I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t) \exp(-itx)| = |f(t)|$ et f est intégrable sur \mathbb{R} . Donc l'application $t \mapsto f(t) \exp(-itx)$ est intégrable sur \mathbb{R} .
2. La fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue d'après le thm de continuité des intégrales param. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|\mathcal{F}(f)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(t) \exp(-itx)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f|$$

donc $\mathcal{F}(f)$ bornée sur \mathbb{R} .

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème de dérivation des intégrales param, il vient que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^k sur \mathbb{R} et que pour tout $p \in \langle 1, k \rangle$

$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. .

- (a) On suppose que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que f' est intégrable sur \mathbb{R} .

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ et comme $f' \in L^1$ alors $\int_0^x f'(t)dt$ admet une limite dans \mathbb{C} quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ donc f admet une limite dans \mathbb{C} quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Cette limite est nulle car $f \in L^1$.

(ii) On intègre par parties.

- (b) Récurrence sur k .

Partie II

- (a) La fonction $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t^p f(t)$ est continue sur \mathbb{R} . Comme $f \in \mathcal{S}$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p+2} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{p+2} f(t) = 0$. Par suite $f_p(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f_p(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui prouve que f_p est intégrable sur \mathbb{R} .

En utilisant la question I-3 on obtient que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p)(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- (b) La fonction $f^{(p)}$ est continue sur \mathbb{R} . De plus on déduit du fait que $f \in \mathcal{S}$ que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f^{(p)}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 f^{(p)}(t) = 0$ ou encore $f^{(p)}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f^{(p)}(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $f^{(p)}$ est intégrable sur \mathbb{R} . En utilisant la question I-4-b on obtient que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}(f^{(p)})(x) = (ix)^p \mathcal{F}(f)(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(c) D'après la question précédente $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ . De plus pour x non nul

$$\left| x^p (\mathcal{F}(f))^{(q)}(x) \right| = \left| x^p (-i)^q \mathcal{F}(f_q)(x) \right| = \left| \frac{1}{x} (ix)^{p+1} \mathcal{F}(f_q)(x) \right| = \left| \frac{1}{x} \mathcal{F}\left(f_q^{(p+1)}\right)(x) \right|$$

Comme $f_q^{(p+1)}$ est intégrable sur \mathbb{R} alors $\mathcal{F}\left(f_q^{(p+1)}\right)$ est bornée par suite $\frac{1}{x} \mathcal{F}\left(f_q^{(p+1)}\right)(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p (\mathcal{F}(f))^{(q)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^p (\mathcal{F}(f))^{(q)}(x) = 0$$

puis $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$.

2.

(a) Soit $h > 0$. Comme $f \in \mathcal{S}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nh)^2 f(nh) = 0$. Donc $f(nh) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve la convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(nh)$.

(b) Soit $h > 0$. Comme f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} f(x) dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} h \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh)) dt$$

à l'aide d'une intégration par parties, il vient que

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh)) dt &= [(t-n-1)(f(th) - f(nh))]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} (t-n-1) hf'(th) dt \\ &= \int_n^{n+1} (n+1-t) hf'(th) dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh)) dt \right| &= \left| \int_n^{n+1} (n+1-t) hf'(th) dt \right| \leq h \int_n^{n+1} |(n+1-t) f'(th)| dt \\ &\leq h \int_n^{n+1} |f'(th)| dt = \int_{nh}^{(n+1)h} |f'(x)| dx \end{aligned}$$

compte tenu du fait que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$ on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(x) dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} h \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh)) dt \right| \\ &\leq h \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_n^{n+1} (f(th) - f(nh)) dt \right| \\ &\leq h \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} |f'(x)| dx = h \int_0^{+\infty} |f'(x)| dx \end{aligned}$$

(c) On obtient immédiatement $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

- (d) On pose $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$. Alors $g \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} g(nh)$ converge absolument et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} hg(nh) = \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(-nh)$ est absolument convergente et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hf(-nh) = \int_0^{+\infty} f(-x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx$$

Finalement la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nh)$ converge et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} hf(nh) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

3. Soit T un réel strictement positif.

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{S}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + nT)^2 f(x + nT) = 0$. Donc $f(x + nT) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x + nT)$. De même la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x - nT)$ est convergente. On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nT)$ est convergente.

- (b) Remarquer que la fonction $y \mapsto y^2 f(y)$ est continue et a des limites finies en $\pm\infty$ donc elle est bornée par un réel M . On en déduit $|f(y)| \leq \frac{M}{y^2}$ pour tout réel y non nul.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$ on a $T + x > 0$ et $T - x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} |f_T(x) - f(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} f(x + nT) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x - nT) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f(x + nT)| + \sum_{n=1}^{+\infty} |f(x - nT)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT + x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT - x)^2} \end{aligned}$$

Comme les séries de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT + x)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT - x)^2}$ (de variable T) convergent normalement sur $[T_0, +\infty[$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{M}{(nT + x)^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{M}{(nT - x)^2} = 0$ il vient que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT + x)^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT - x)^2} = 0$$

donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} |f_T(x) - f(x)| = 0$ puis

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(x) = f(x).$$

(c) La T -périodicité de f_T est évidente. Montrons qu'elle est de classe C^1 .

Les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x + nT)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x - nT)$ convergent simplement sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $\varphi_n : x \mapsto f(x + nT)$ et $\psi_n : x \mapsto f(x - nT)$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} (car $f \in \mathcal{S}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'_n(x) = f'(x + nT) \text{ et } \psi'_n(x) = f'(x - nT)$$

La fonction $y \mapsto y^2 f'(y)$ est continue et a des limites finies en $\pm\infty$ donc elle est bornée par un réel M . On en déduit $|f'(y)| \leq \frac{M}{y^2}$ pour tout réel y non nul. Soit $a > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $a < NT$. Pour $x \in [-a, a]$ et $n \geq N$ on a

$$|\varphi'_n(x)| = |f'(x + nT)| \leq \frac{M}{(x + nT)^2} \leq \frac{M}{(nT - a)^2}$$

et de même

$$|\psi'_n(x)| = |f'(x - nT)| \leq \frac{M}{(nT - a)^2}.$$

Ceci prouve que les séries de fonctions $\sum_{n \geq N} \varphi'_n$ et $\sum_{n \geq N} \psi'_n$ sont normalement convergentes

sur $[-a, a]$.

On peut alors conclure que f_T est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(a) On a

$$\begin{aligned} f_T(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + kT) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(x + kT) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - kT) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) \end{aligned}$$

séries normalement convergente sur $[0, T]$ donc on peut intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} c_n(f_T) &= \frac{1}{T} \int_0^T f_T(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T f(x + kT) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) dx + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T f(x - kT) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x) \exp\left(\frac{-2i\pi n(x-kT)}{T}\right) dx + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-kT}^{-(k-1)T} f(x) \exp\left(\frac{-2i\pi n(x+kT)}{T}\right) dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \mathcal{F}(f)\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \end{aligned}$$

Le regroupement $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} = \int_{-\infty}^{+\infty}$ est justifié par l'intégrabilité de f sur \mathbb{R} .

- (b) Comme f_T est de classe C^1 alors la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} et sa somme est f_T . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f_T) \exp\left(\frac{2i\pi nx}{T}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \exp\left(\frac{2i\pi nx}{T}\right)$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(u) \exp(-iux).$$

Alors $g \in \mathcal{S}$. Comme $\frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$, la question II-2-d implique que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} g\left(n \frac{2\pi}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(u) \exp(-iux) du = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x)$$

d'autre part, la question II-3-b donne

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} g\left(n \frac{2\pi}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \exp\left(-\frac{in2\pi x}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(-x) = f(-x).$$

On en déduit la formule d'inversion

$$(1) \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Partie III

1. (a) Evident.
- (b) Récurrence sur n .
- (c) L'application φ_0 est continue sur \mathbb{R} , de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\varphi_0^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc φ_0 est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $\varphi_0^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Evident.

3. On pose $\psi_b = \mathcal{F}(g)$ avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_0(-x)$.

- (a) f_0 est de classe C^∞ et à support compact donc $f_0 \in \mathcal{S}$. Il vient que $g \in \mathcal{S}$ puis, en utilisant la question II-1-c, on montre que $\psi_b \in \mathcal{S}$.

- (b) .
- (i) On a $\mathcal{F}(\psi_b)(x) = (\mathcal{F}(\mathcal{F}(g)))(x) = g(-x) = f_0(x)$ est strictement positive sur $\left] \frac{1}{b}, b \right[$ et nulle ailleurs.
 - (ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi_b(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathcal{F}(g)(t) dt = \frac{1}{i^k} \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^k \mathcal{F}(g)(t) dt \\ &= \frac{1}{i^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(g^{(k)})(t) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^k} \mathcal{F}(\mathcal{F}(g^{(k)}))(0) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i^k} g^{(k)}(0) = 0. \end{aligned}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n} \right| \leq \frac{1}{b^n}$. Comme la série $\sum \frac{1}{b^n}$ est convergente alors la série $\sum \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}$ converge.
2. D'après la majoration de la question précédente la série de fonctions continues $\sum \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}$ converge normalement sur \mathbb{R} donc sa somme W est continue sur \mathbb{R} . De la même majoration on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|W(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^n}$$

donc fonction W est bornée sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- (a) La fonction $t \mapsto W(t) \psi_b(2\pi b^p(t-x))$ est continue sur \mathbb{R} et nulle pour $t \notin \left[x + \frac{1}{2\pi b^{p+1}}, x + \frac{1}{2\pi b^{p-1}} \right]$, donc elle est intégrable sur \mathbb{R} . Cela justifie la définition de $C_p(x)$.
- (b) Un changement de variable donne

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (2\pi b^p)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) \psi_b(2\pi b^p(t-x)) dt \\ &= (2\pi b^p) \int_{-\infty}^{+\infty} W\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right) \psi_b(u) du \\ &= (2\pi b^p) \int_{\frac{1}{b}}^b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(2\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right)}{b^n} \psi_b(u) du \end{aligned}$$

Une interversion série-intégrale justifiée par la convergence normale sur le segment $\left[\frac{1}{b}, b\right]$, montre que

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^b \frac{\cos\left(2\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right)}{b^n} \psi_b(u) du \\ &= (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^b \frac{\exp\left(2i\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right) + \exp\left(-2i\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right)}{2b^n} \psi_b(u) du \\ &= (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(2i\pi b^n x)}{2b^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ib^{n-p}u) \psi_b(u) du \\ &\quad + (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{2b^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ib^{n-p}u) \psi_b(u) du \\ &= (2\pi b^p) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(2i\pi b^n x)}{2b^n} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\psi_b)(-b^{n-p}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{2b^n} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\psi_b)(b^{n-p}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{\frac{3}{2}} b^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{b^n} \mathcal{F}(\psi_b)(b^{n-p}) \end{aligned}$$

(c) $\mathcal{F}(\psi_b)(b^{n-p}) = 0$ pour tout $n \neq p$ donc

$$|C_p(x)| = \frac{1}{2} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}(\psi_b)(1).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que W est dérivable en x .

(a) Utiliser la définition de la dérivabilité.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la question III-3-b-ii

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (2\pi b^p) \int_{-\infty}^{+\infty} W\left(x + \frac{s}{2\pi b^p}\right) \psi_b(s) ds \\ &= (2\pi b^p) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(W(x) + \frac{s}{2\pi b^p} W'(x) + \frac{s}{2\pi b^p} \varepsilon_x\left(\frac{s}{2\pi b^p}\right) \right) \psi_b(s) ds \\ &= (2\pi b^p) W(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_b(s) ds + W'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} s \psi_b(s) ds + \int_{-\infty}^{+\infty} s \varepsilon_x\left(\frac{s}{2\pi b^p}\right) \psi_b(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s \varepsilon_x\left(\frac{s}{2\pi b^p}\right) \psi_b(s) ds \end{aligned}$$

(c) En utilisant le théorème de la convergence dominée on obtient $\lim_{p \rightarrow +\infty} C_p(x) = 0$.

5. On a prouvé que si W est dérivable en un réel x alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} C_p(x) = 0$. Or d'après la question

IV-3-c $|C_p(x)| = \frac{1}{2} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}(\psi_b)(1)$ ne peut pas tendre vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Cela prouve que W n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .