



Concours Mathématiques et Physique Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. Notons R_a (resp R_b) le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (resp $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$).

On a: $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$ donc $b_n = O(a_n)$ donc $R_b \geq R_a = +\infty$ par suite $R_b = +\infty$.

2. (a) $\forall x > 0, T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \geq b_1 x$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$) donc $T(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

(b) i. Soit $\varepsilon > 0$, on a: $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc

$$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$ donc $\forall n \geq n_0, |a_n - \ell b_n| \leq \varepsilon b_n$.

ii. $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} |S(x) - \ell T(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{n_0} (a_n - \ell b_n) x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - \ell b_n) x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |a_n - \ell b_n| x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n + \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} b_n x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n + \varepsilon T(x), \text{ (car } \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0 \text{)}. \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \geq 0, \left| \frac{S(x)}{T(x)} - \ell \right| \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n}{T(x)} + \varepsilon$$

(c) $\forall x \geq 0$, on a : $T(x) \geq b_{n_0+1} x^{n_0+1}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$) donc

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n}{T(x)} \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n}{b_{n_0+1} x^{n_0+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

i. donc

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \geq A : \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n}{T(x)} \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall x \geq A : \left| \frac{S(x)}{T(x)} - \ell \right| \leq 2\varepsilon$$

par suite $\boxed{\frac{S(x)}{T(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell}$

3. Soit $a > 0$.

(a) On a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2} &= \exp\left[n^2 \ln\left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left[n^2 \left(\frac{\ln a}{n} - \frac{(\ln a)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\ &= \exp[n \ln a] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right] \cdot \exp[o(1)] \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^n \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)}$$

(b) On applique ce qui précède aux suites suivantes $a_n = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2}$ et $b_n = \frac{a^n}{n!} > 0$
on a : $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est $+\infty$ et de
somme $\exp(ax)$ donc

$$\frac{S(x)}{T(x)} = \frac{S(x)}{\exp(ax)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$$

par suite

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right) \exp(ax)}$$

Partie -II-

1. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ (d'après la règle de D'Alembert) et de
somme $\exp(-2z)$ d'où

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n = \exp(-3t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\boxed{((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est B-convergente et } \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} ((-2)^n) = 0}$

2. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ (d'après la règle de D'Alembert) et de somme $\exp(4z)$ d'où

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} t^n = \exp(3t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc $((4)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas B-convergente

3. (a) D'après la règle de D'Alembert le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et de somme $\exp(a z)$

(b) On a :

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n = \exp[(a-1)t] = \exp[(\operatorname{Re}(a) - 1)t] \cdot \exp[(i \operatorname{Im}(a))t]$$

1^{er} cas : $a = 1$, $\exp[(a-1)t] = 1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$.

2^{ème} cas : $a \neq 1$,

$$\left| \exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n \right| = \exp[(\operatorname{Re}(a) - 1)t].$$

Si $\operatorname{Re} a < 1$ alors $|\exp[(a-1)t]| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Si $\operatorname{Re} a > 1$ $|\exp[(a-1)t]| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n$ n'a pas de limite quand $t \rightarrow +\infty$.

Si $\operatorname{Re} a = 1$, et $a \neq 1$ alors

$$\exp[(a-1)t] = \exp[(i \operatorname{Im} a)t] = \sin[(\operatorname{Im} a)t] + i \cos[(\operatorname{Im} a)t]$$

et $\sin[(\operatorname{Im} a)t]$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (il suffit d'utiliser le critère séquentiel avec la suite $x_n = \frac{\pi}{2|\operatorname{Im} a|} + \frac{n\pi}{|\operatorname{Im} a|}$).

Conclusion : la suite $(u_n)_n$ est B-convergente si et seulement si $a = 1$ ou $\operatorname{Re}(a) < 1$ et dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n) = 0$, si $\operatorname{Re}(a) < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n) = 1$, si $a = 1$.

4. On a d'après la partie précédente : $\frac{u_n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^n}{n!} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right) \exp[(a-1)t]$$

ce qui donne :

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right) & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } 1 < a \end{cases}$$

Donc la suite (u_n) est B-convergente ssi $0 < a \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, si $a = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, si $0 < a < 1$.

5. Soit $(u_n)_n$.

- (a) On suppose que $(u_n)_n$ converge vers l au sens usuel. On considère les deux suites $a_n = \frac{u_n}{n!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Alors $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est $+\infty$ et de somme $\exp(z)$ donc, d'après partie I, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $+\infty$ et on a

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{\exp(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} l$$

par suite $(u_n)_n$ est B-convergente et sa B-limite est l .

- (b) On a : d'après ce qui précède la suite $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est B-convergente mais n'est pas convergente.

6. (a) Notons par R_1 (resp R_2) rayon de convergence de série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ (resp $\sum_{n \geq 0} \frac{v_n}{n!} z^n$) alors si on note par R le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n + v_n}{n!} z^n$ on a $R \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$, d'autre part

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n + v_n}{n!} t^n = \exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n + \exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n + \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

donc $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est B-convergente et on a : $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n + \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Si on note par R_λ rayon de convergence de série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda u_n}{n!} z^n$ alors $R_\lambda \geq R_1 = +\infty$. D'autre part

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda u_n}{n!} t^n = \lambda \exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

donc $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est B-convergente et on a : $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n) = \lambda \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (b) Si on prend $u_n = v_n = (-2)^n$ les deux suites sont B-convergente mais la suite $u_n v_n = 4^n$ n'est pas B-convergente.

Partie -III-

1. 1^{er} cas : $a = 1$. alors : $S_n = \sum_{k=0}^n a^k = n + 1$, dans ce cas

$$\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} z^n + \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

donc la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ est une somme de deux séries entières de rayon de convergence $+\infty$ donc son rayon de convergence $+\infty$ et

$$\exp(-t) \sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} t^n = \exp(-t) [(t+1) \exp t] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

2^{ème} cas : $a \neq 1$. Alors $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ donc

$$\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n = \frac{1}{1-a} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} - a \sum_{n \geq 0} \frac{a^n z^n}{n!}$$

par suite $\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et

$$\exp(-t) \sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} t^n = \frac{1}{1-a} - a \exp((a-1)t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} \text{ si } \operatorname{Re}(a) < 1$$

et n'admet pas de limite dans \mathbb{C} si $\operatorname{Re}(a) \geq 1$.

Conclusion : $\sum_{n \geq 0} a^n$ est B-convergente ssi $\operatorname{Re}(a) < 1$ et dans ce cas $\operatorname{Blim} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

2. (a) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge au sens usuel alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens usuel donc d'après 5) a) Partie -II- (S_n) est B-convergente donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-convergente et dans ce cas

$$\operatorname{B-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Blim}_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- (b) On sait que $\sum_{n \geq 0} (-2)^n$ est B-convergente d'après question précédente et $\sum_{n \geq 0} (-2)^n$ n'est pas convergente au sens usuel.

3. (a) La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{S_{n-1}}{n!} z^n$ est la série primitive de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ donc son rayon de convergence $+\infty$.

- (b) Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ on peut intégrer terme à terme sur $[0, t]$. Donc

$$\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n r^n}{n!} \right) dr = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} \int_0^t r^n dr = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n.$$

D'autre part $\exp(-r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} S$, donc $\exp(-r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n = S + o(1)$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n = S e^r + o(e^r).$$

En intégrant

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n &= \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n r^n}{n!} \right) dr \\ &= \int_0^t (S e^r + o(e^r)) dr \\ &= S e^t - S + \int_0^t o(e^r) dr \\ &= S e^t + o(e^t) \text{ (car la fonction } \exp \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

Donc

$$e^{-t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S.$$

- (c) On a : $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont B-convergentes donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (S_n - S_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est B-convergente et $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} S_n - \text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

4. (a) Comme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n - \sum_{n \geq 1} \frac{S_{n-1}}{n!} z^n$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$.

- (b) Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{S_{n-1}}{n!} z^n$ est $+\infty$ donc G est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, G'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1}$$

donc F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} (produit de fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}) et on a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{-t} G'(t) - e^{-t} G(t) \\ &= e^{-t} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n \right) \\ &= e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n \right) \\ &= e^{-t} \left(S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n!} t^n \right) \\ &= e^{-t} \left(u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) \\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \end{aligned}$$

(c) On a

$$\int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt = \int_0^T F'(t) dt = F(T) - F(0),$$

or $F(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} S = B \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $F(0) = e^0 G(0) = 0$ donc

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt = B \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

5. (a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 au sens usuel donc elle est B-convergente et $\text{Blim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(b) On a : $\left| \frac{u_n}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} t^n \\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^n \\ &= \frac{e^{-t}}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n \\ &= \frac{1 - e^{-t}}{t} \end{aligned}$$

(c) Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-convergente alors d'après question 4)c) de la

partie III la limite $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt$ existe

Or

$$e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = \frac{1 - e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc $t \rightarrow \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est une fonction positive qui n'est pas intégrable \mathbb{R}^+ . Ce qui est absurde.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas B-convergente.

(d) La condition $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ B-convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ est nécessaire mais n'est pas suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit B-convergente.

Partie -IV-

1. D'après question c)4) partie III, si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-convergente elle est B-sommable.

2. (a) Soit $v_p = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n$, on a :

$$\frac{|v_{p+1}|}{|v_p|} = \frac{(2p+4)^n}{(2p+2)(2p+3)(2p+2)^n} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2p)^n}{(2p)^{n+2}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

D'après la règle de D'Alembert $\sum_{p \geq 0} v_p$ converge absolument d'où l'existence de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n \right) t^n \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t(2p+2))^n}{n!} \right) \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+2)t}}{(2p+1)!} \\ &= e^t \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+1)t}}{(2p+1)!} \\ &= e^t \sin(e^t) \end{aligned}$$

(c) La fonction $t \rightarrow \sin(e^t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (il suffit de prendre la suite

$u_n = \ln(\frac{\pi}{2} + n\pi)$, donc la fonction $t \rightarrow e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n$ n'admet pas de limite en $+\infty$, par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas B-convergente.

(d) On a

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt &= \int_0^T e^{-t} e^t \sin(e^t) dt \text{ (IPP)} \\ &= [-e^{-t} \cos(e^t)]_0^T - \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt \\ &= -e^{-T} \cos(e^T) + \cos 1 - \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt \end{aligned}$$

or $\lim_{T \rightarrow +\infty} -e^{-T} \cos(e^T) + \cos(1) = \cos(1)$ et la fonction $t \rightarrow e^{-t} \cos(e^t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, d'où $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt$ existe donc

$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt$ existe par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable mais n'est pas B-convergente.

3. (a) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument B-sommable alors $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et pour $p = 0$, l'application $t \rightarrow e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ donc

$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt$ existe par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable.

(b) Pour $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n$, on sait que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable et

$$e^{-t} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = e^{-t} \frac{d}{dt} (e^t \sin(e^t)) = e^{-t} [e^t \sin(e^t)] + e^t \cos(e^t)$$

comme $\int_0^T e^{-t} e^t \sin(e^t) dt$ admet une limite dans \mathbb{C} quand $T \rightarrow +\infty$ et

$$\int_0^T e^t \cos(e^t) dt = [\sin(e^t)]_0^T = \sin(e^T) - \sin(1)$$

qui n'admet pas de limite dans \mathbb{C} quand $T \rightarrow +\infty$. Donc

$$\int_0^T \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt = \int_0^T e^{-t} e^t \sin(e^t) dt + \int_0^T e^t \cos(e^t) dt$$

n'admet pas de limite dans \mathbb{C} quand $T \rightarrow +\infty$ par suite $t \rightarrow e^{-t} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas absolument B-sommable.

4. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente alors $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} |u_{n+p}|$ est convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} |u_{n+p}|$ est B-convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{u_{n+p}}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et d'après question c)4) partie -III- $\forall p \in \mathbb{N}$,

$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_{n+p}|}{n!} t^n \right) dt$ existe dans \mathbb{C} . Or

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, e^{-t} \left| \frac{d^p}{dt^p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right| = e^{-t} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+p}}{n!} t^n \right| \leq e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_{n+p}|}{n!} t^n$$

donc l'application $\forall p \in \mathbb{N}$ l'application $t \rightarrow e^{-t} \frac{d^p}{dt^p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , par suite

la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument B-sommable.