REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2005

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2005

Concours en Mathématiques Physique
Epreuve de mathématiques II

Durée: 3 heures Date : 15 Juin 2005 Heure : 8 H Nb pages : 5

Barème: **Exercice** (4 pts). **Problème**: Partie I (6 pts), Partie II (5 pts), Partie III (5 pts).

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Soit E un espace euclidien, muni du produit scalaire $<\,,\,>$ et $\|\ .\ \|$ la norme associée.
Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on désigne par $F^{\perp}$ l'orthogonal de F et p_F le projecteur orthogonal sur F.
On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E et $\mathcal{O}(E)$ le groupe des endomorphismes orthogonaux de E.
Pour tout endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$, on note $\operatorname{Im} u$ l'image de u, $\ker u$ le noyau de u, et u^* l'adjoint de u.

1) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si $p^2 = p$ et $p = p^*$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E, p_F le projecteur orthogonal sur F et g un élément de $\mathcal{O}(E)$.

2a) Montrer que $g^{-1} \circ p_F \circ g = p_{g^{-1}(F)}$.

2b) On pose $f = p_F \circ g$. Donner l'expression simplifiée de $f \circ f^* \circ f$.

2c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p_F \circ g = g \circ p_F$.

3) Soit f appartenant à $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* \circ f = f$.

3a) Montrer que $f^* \circ f$ est le projecteur orthogonal sur $(\ker f)^{\perp}$.

3b) Montrer que pour tout $x \in (\ker f)^{\perp}$, $||f(x)|| = ||x||$.

3c) Montrer qu'il existe une application linéaire g_1 qui envoie $\ker f$ sur $(\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et telle que $||g_1(x)|| = ||x||$, pour tout $x \in \ker f$.

3d) En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F et un endomorphisme orthogonal g de E tels que $f = p_F \circ g$.

Problème

Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes.
Pour toute matrice $A = (a_{kj})_{1 \leq k,j \leq p}$ de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$,on pose $\|A\| = p \underset{k,j}{Sup}\ |a_{kj}|$.
On note $GL(p, \mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$, on note $(\det A)$ son déterminant et $tr(A)$ sa trace.
On désigne par I_p la matrice unité de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$.

Partie I

1)Montrer que pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

2) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ et tout entier n, on pose $p_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$, avec la convention $A^0 = I_p$.
Montrer que la suite $(p_n(A))_{n \geq 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$.
On note $\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} p_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

3) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que

$$A \exp(B) = \exp(B) A \quad \text{et} \quad \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

4) On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres complexes.

4a) Déterminer la matrice $A^2 + (\det A) I_2$.

4b) Montrer que si $(\det A) = 0$, alors $\exp(A) = I_2 + A$.

4c) On suppose que $(\det A) = -\alpha^2$, $\alpha \neq 0$. Montrer que

$$\exp(A) = ch\alpha I_2 + \frac{sh\alpha}{\alpha} A.$$

4d) Donner l'expression de $\exp(A)$ lorsque $(\det A) = \alpha^2$, $\alpha \neq 0$.

5) Soit a et b deux nombres complexes distincts et A une matrice de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ vérifiant

$$(A - aI_p)(A - bI_p) = 0.$$

5a) Déterminer les nombres α_n et β_n qui vérifient

$$p_n(x) = (x-a)(x-b)q_n(x) + \alpha_n + \beta_n(x-a);$$

où $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et q_n est un polynôme à coefficients complexes.

5b) Exprimer $p_n(A)$ en fonction A, α_n et β_n.

5c) Montrer alors que

$$\exp(A) = e^a I_p + \frac{e^b - e^a}{b-a}(A - aI_p).$$

5d) Que devient cette dernière écriture lorsque $a = b$?

6a) Montrer que l'application $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ définie par $c(t) = \exp(tA)$ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

6b)Déterminer la dérivée de l'application $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ définie par $d(t) = \exp(tA)\exp(-tA)$.

6c) En déduire que $\exp(A)\exp(-A) = I_p$.

7a) Déterminer la dérivée de l'application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ définie par

$$\gamma(t) = \exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB).$$

7b) En déduire que

$$AB = BA \Longrightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

8a) Calculer les exponentielles des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix}.$$

8b) A-t-on

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \Longrightarrow AB = BA \ ?$$

9a) Montrer que si T est une matrice triangulaire supérieure alors $\exp(T)$ est triangulaire supérieure.

9b) Donner les valeurs propres de $\exp(T)$ en fonction de celles de T.

10) Soit $A \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ et $P \in GL(p,\mathbb{C})$.

10a) Exprimer $\exp(PAP^{-1})$ en fonction de P et de $\exp(A)$.

10b) En déduire l'expression de $\det(\exp(A))$ en fonction de $tr(A)$.

Partie II

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $P_f(x) = \det(f - x\,id_p)$ son polynôme caractéristique, où id_p désigne l'identité sur $\mathbb{C}^p$.
On pose

$P_f(x) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda_j - x)^{\alpha_j}$, où les λ_j sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives α_j.

$q_j(x) = \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{k}(x-\lambda_l)^{\alpha_l}$, $1 \leq j \leq k$.

$N_j = \ker(f - \lambda_j id_p)^{\alpha_j}$, $1 \leq j \leq k$.

1) Montrer que $\quad \mathbb{C}^p = \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} N_j$.

2a) Montrer qu'il existe des polynômes $r_1, ..., r_k$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\sum_{j=1}^{k} r_j q_j = 1$.

2b) On note $\Pi_j = (r_j q_j)(f)$, $1 \leq j \leq k$. Montrer que

$$\Pi_1 + \cdots + \Pi_k = id_p.$$

3) Soit m et n deux entiers distincts appartenant à $\{1, ..., k\}$.

3a) Montrer que pour tout v appartenant à N_m, $\Pi_n(v) = 0$.

3b) Montrer que pour tout $v \in N_m$, $\Pi_m(v) = v$.

3c) En déduire que pour tout $1 \leq j \leq k$, Π_j est le projecteur sur N_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{k} N_j$.

4) Montrer que l'endomorphisme $d = \lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_k \Pi_k$ est diagonalisable.

5) On pose $n = f - d$.

5a) Montrer que pour tout $v \in N_j$, $n^{\alpha_j}(v) = 0$.

5b) En déduire que l'endomorphisme n est nilpotent.

6) Soit d' un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^p$ qui commute avec f.

6a) Montrer que d' laisse stable N_j, pour tout $1 \leq j \leq k$.

6b) En déduire que les endomorphismes d et d' sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^p$.

7) Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{C}^p$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de $\mathbb{C}^p$ tels que :

$$d \text{ est diagonalisable, } n \text{ est nilpotent, } d \circ n = n \circ d \quad \text{et} \quad f = d + n.$$

8) En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$, il existe un unique couple (D, N) de matrices appartenant à $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ telles que :

$$D \text{ est diagonalisable, } N \text{ est nilpotente, } DN = ND \quad \text{et} \quad A = D + N.$$

On dira que $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de la matrice A.

Partie III

1) Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$.

1a) Montrer que $I_p + N$ est inversible.

1b) Montrer que la matrice $\exp(D) \sum_{j=1}^{p-1} \frac{N^j}{j!}$ est nilpotente.

1c) Déterminer alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$.

1d) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ est diagonalisable.

1e) Décrire toutes les matrices X de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ qui vérifient $\exp(X) = I_p$.

2) On considère l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ définie par

$$g(t) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j+1} \frac{t^j N^j}{j}.$$

On pose $f(t) = \exp(g(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

2a) Montrer que g et f sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = (I_p + tN)^{-1}N$.

2c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = g'(t)f(t)$.

2d) Montrer que f'' est identiquement nulle et en déduire que $f(t) = I_p + tN$.

3) Soit D une matrice diagonalisable de $GL(p, \mathbb{C})$.
On désigne par $(\lambda_j = |\lambda_j|\, e^{i\theta_j})_{1 \leq j \leq k}$ les valeurs propres distinctes de D, et on pose pour tout $1 \leq j \leq k$, $\mu_j = Log\,|\lambda_j| + i\theta_j$.

3a) Montrer qu'il existe une matrice diagonalisable D' appartenant à $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$, ayant pour valeurs propres $\mu_1, ..., \mu_k$ et vérifiant $D = \exp(D')$.

3b) Soit L un polynôme interpolateur de Lagrange tel que

$$L(\lambda_j) = \mu_j, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq k.$$

Montrer que $D' = L(D)$.

4) Soit A une matrice de $GL(p, \mathbb{C})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford.

4a) Montrer que D est inversible.

4b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$I_p + D^{-1}N = \exp(Q(D^{-1}N)).$$

4c) En déduire que l'application exponentielle est une surjection de $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ sur $GL(p, \mathbb{C})$.

5) Déterminer toutes les matrices X de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ telles que

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$