Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 05 Juin 2010	**Heure: 8 H**	**Durée: 3 H**	**Nbre pages: 5**

Barème : Partie I: 5 pts , Partie II: 8 pts, Partie III: 2 pts , Partie IV: 5 pts

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^*$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels strictement positifs. Dans tout ce qui suit, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on adopte les notations suivantes :

- $\mathbb{R}^n$ est l'espace vectoriels des n-uplets à coefficients réels.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $(\cdot,\cdot)$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.
- $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne des suites de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne la $\mathbb{R}$ algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée.
- I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $D = Diag(d_1, ...d_n)$ est une matrice diagonale avec $d_1, ..., d_n$ les termes diagonaux.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ le sous ensemble des matrices posivites de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est à dire des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(AX, X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices othogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On appelle rayon spectral de la matrice A le réel positif, noté $\rho(A)$, défini par:

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|.$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ sont les valeurs propres de A (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X, b \in \mathbb{R}^n$. On appelle une méthode itérative pour la résolution du système linéaire

$$AX = b \tag{1}$$

la donnée d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'un vecteur c et d'une suite récurrente de vecteurs $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} X^0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{donné}, \\ X^{k+1} = BX^k + c. \end{cases} \tag{2}$$

qui tend vers la solution exacte X du système (1) quand k tends vers l'infini.

- On dit que la méthode itérative (2) est convergente si la suite de solution $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle converge vers la solution X du problème (1).
- On dit que la suite de vecteurs $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers $X \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\lim_{k\to+\infty} \|X^k - X\|_2 = 0$$

On se propose dans ce problème l'étude de la convergence d'une méthode itérative pour résoudre un système linéaire.

I - Norme matricielle

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$:

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n;\ \text{tel que } \|X\|_2 = 1\}.$$

On note

$$|\!|\!| A |\!|\!|_2 = \sup_{X\in S}(\|AX\|_2).$$

1. Montrer que $\|MX\|_2 \leq |\!|\!| M |\!|\!|_2 \|X\|_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_2$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\!|\!| A\cdot B |\!|\!|_2 \leq |\!|\!| A |\!|\!|_2 |\!|\!| B |\!|\!|_2$.
4. Soit $U \in \mathcal{O}(n)$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\!|\!| MU |\!|\!|_2 = |\!|\!| UM |\!|\!|_2 = |\!|\!| M |\!|\!|_2$.
5. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\rho(A) \leq |\!|\!| A |\!|\!|_2$.
6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $|\!|\!| B |\!|\!|_2 < 1$. Soit $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} B^k$.
   (a) Montrer que la suite S_N est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_2$. On note S sa limite.
   (b) Montrer que $(I - B)$ est inversible et que son inverse est S.
7. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $(I - B)$ est non inversible alors $|\!|\!| B |\!|\!|_2 \geq 1$.

II - Propriétées des matrices symétriques positives

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que
$$A =^t PDP$$
avec les λ_i sont les valeurs propres de A.

2. Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \geq 0$.

3. Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées suivants l'ordre croissant et $(V_1, ..., V_n)$ les vecteurs propres orthogonaux qui leur sont associés. On pose
$$q_A(X) = (AX, X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$
   (a) Montrer que $q_A(X) \leq \lambda_n \|X\|_2^2$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que $q_A(X) \geq \lambda_1 \|X\|_2^2$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
   (c) En déduire que $q_A(X)$ est bornée sur S.
   (d) Montrer que $AX = \lambda_n X$ si et seulement si $(AX, X) = \lambda_n \|X\|_2^2$.
   (e) Montrer que
$$\inf_{X \in S}(q_A(X)) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \sup_{X \in S}(q_A(X)) = \lambda_n.$$
   (f) Montrer que $A^k X$ tend vers 0 , pour tout choix de $X \in \mathbb{R}^n$, quand k tend vers $+\infty$ si et seulement si $\lambda_n < 1$.

4. Montrer que $\|A\|_2 = \lambda_n$.

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soit $\gamma \in R_+$ et $B(\gamma) = I - \gamma A$.
   (a) Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i > 0$.
   (b) Exprimer les valeurs propres $\mu_i(\gamma)$ de $B(\gamma)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, de en fonction de γ et des valeurs propres de A.
   (c) On définit
$$f_i(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_i|, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}_+$$
   et
$$f(\gamma) = \max_{1 \leq i \leq n}(f_i(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}_+.$$
      i. Montrer que $f(\gamma) = \max(f_1(\gamma), f_n(\gamma))$.
      ii. Montrer qu'il existe $\gamma^* > 0$ tel que
$$f(\gamma) = \begin{cases} f_1(\gamma) & \text{si} \quad 0 < \gamma \leq \gamma^*, \\ f_n(\gamma) & \text{si} \quad \gamma^* \leq \gamma. \end{cases}$$
      iii. Donner l'expression de γ^*.
   (d) En déduire que
$$\rho(B(\gamma)) = \begin{cases} 1 - \lambda_1\gamma & \text{si} \quad 0 < \gamma \leq \gamma^*, \\ \lambda_n\gamma - 1 & \text{si} \quad \gamma^* \leq \gamma. \end{cases}$$

(e) Montrer que $\rho(B(\gamma))$ atteint son minimum en γ^* et que

$$\rho(B(\gamma^*)) = \min_{\gamma>0}(\rho(B(\gamma)) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}.$$

III - Valeurs singulières d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

2. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale telles que

$${}^tAA = {}^tPDP$$

avec les λ_i sont les valeurs propres de ${}^tAA$.

On appelle valeurs singulières de A, les valeurs $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, pour $1 \leq i \leq n$.

3. Montrer que

$$\sigma_{max} = \sup_{X\in S}(\|AX\|_2), \quad \text{et} \quad \sigma_{min} = \inf_{X\in S}(\|AX\|_2)$$

où $\sigma_{max} = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sigma_i$ et $\sigma_{min} = \min\limits_{1\leq i\leq n} \sigma_i$.

IV- Convergence d'une méthode itérative

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} I & A \\ {}^tA & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

avec $(Z, X) \in \mathbb{R}^{2n}$.

1. Montrer que si $(Z, X) \in \mathbb{R}^{2n}$ est solution du système (3) alors $X \in \mathbb{R}^n$ est solution de

$$({}^tAA + \alpha I)X = {}^tAb. \tag{4}$$

2. Montrer que $({}^tAA + \alpha I) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive.

3. Montrer que la matrice du système (3) est inversible.

4. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et la matrice $B(\gamma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$B(\gamma) = I - \gamma({}^tAA + \alpha I).$$

(a) Montrer que $X \in \mathbb{R}^n$ est solution du système (4) si et seulement si $X \in \mathbb{R}^n$ est solution du système:

$$X = B(\gamma)X + \gamma\,({}^tAb).$$

(b) On considère la méthode itérative:

$$\begin{cases} X^0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{donné}, \\ X^{k+1} = B(\gamma)X^k + \gamma\,({}^tAb). \end{cases} \tag{5}$$

i. Montrer que si la suite de solution $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ du problème (5) converge vers X^*, alors X^* est solution du système (4).

ii. Montrer que la méthode itérative (5) est convergente, pour tout choix de X^0, si et seulement si $\rho(B(\gamma)) < 1$.

iii. Donner les valeurs de γ en fonction de α et les valeurs singulières de A pour que la méthode itérative (5) soit convergente.

iv. Trouver la valeur de γ qui minimise $\rho(B(\gamma))$.

Fin de l'épreuve