REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2012

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 9 Juin 2012	**Heure :** 8 H	**Durée:** 3 heures	**Nb pages:** 4
Barème: **Partie I:** 5 pts	**Partie II-A :** 3 pts	**Partie II-B:** 10 pts	**Partie II-C:** 2 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Rappels et notations

- Pour n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 1, on note:
  - ⋆ $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et m colonnes.
  - ⋆ Lorsque $n = m$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - ⋆ Pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ sa matrice transposée et $rg(A)$ son rang. $Ker\, A$ est le noyau de A:
$$Ker\, A = \{\xi \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \mid A\xi = 0\},$$
    $Im\, A$ est l'image de A:
$$Im\, A = \{A\xi \mid \xi \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})\}.$$
- Pour tout k entier naturel, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degrés $\leqslant k$.
- $F^\perp$ désigne l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F d'un espace euclidien.

PARTIE I

Dans cette partie, on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques: pour tout entier $k \geqslant 1$, en particulier $k = n$ ou m,
$$< U, V >_k = {}^tU\, V\,, \quad \forall\, U, V \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}).$$

La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|.\|_k$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Vérifier que $Im\,A$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Soit p la projection orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur $Im\,A$.

      i. Justifier qu'il existe $\xi_0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ tel que
$$A\xi_0 = p(b).$$

      ii. Montrer que
$$\|A\xi - b\|_n^2 \geqslant \|A\xi_0 - b\|_n^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$

      iii. Conclure que
$$\min_{\xi \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})} \|A\xi - b\|_n = \|A\xi_0 - b\|_n,$$
c'est à dire ξ_0 rend minimale la valeur de $\|A\xi - b\|_n$, lorsque ξ décrit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, ξ_0 sera appelée une **pseudo-solution** du système:
$$A\xi = b. \tag{S1}$$

2. Montrer que si $Ker\,A = \{0\}$, alors le système $(S1)$ admet une pseudo-solution unique.

3. Montrer que ξ_0 est une pseudo-solution du système $(S1)$ si et seulement si, pour tout $\xi \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$,
$$< A\xi, A\xi_0 - b >_n = 0.$$

4. En déduire que ξ_0 est une pseudo-solution de $(S1)$ si et seulement si:
$${}^tA\,A\xi_0 \;=\; {}^tA\,b. \tag{S2}$$

PARTIE II

On considère une suite de réels quelconque $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ et une suite d'entiers $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ telle que
$$x_i = i, \qquad \forall\, i \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Dans cette partie, on suppose $\mathbf{0 \leqslant m \leqslant n}$, et on cherche à trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tels que la quantité
$$\Psi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$
soit minimale et à préciser la valeur δ_m de ce minimum.

- A - Minimisation dans $\mathbb{R}_m[X]$

Soit un polynôme P tel que:
$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}_m[X], \text{ on lui associe } \xi = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $P(x_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

2. En déduire qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = A\xi.$$

3. Calculer $rg(A)$.

4. Trouver $b \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $\Psi_m(P) = \|A\xi - b\|_{n+1}^2$.

5. Vérifier que

$$\min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \Psi_m(P) = \min_{\xi \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})} \|A\xi - b\|_{n+1}^2.$$

6. En déduire qu'il existe un unique $P_m \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \Psi_m(P) = \Psi_m(P_m).$$

   On pose $\Psi_m(P_m) = \delta_m$.

- B - Calculs de P_m et δ_m

1. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto < P, Q > = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

   munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'une structure d'espace euclidien.

   Dans ce qui suit, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de cette structure euclidienne. La norme d'un polynôme P est alors $\|P\| = \sqrt{< P, P >}$.

2. Pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on pose le polynôme $L_i = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \left(\dfrac{X - x_k}{x_i - x_k} \right)$.

   (a) Pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, quel est le degré de L_i?

   (b) Vérifier que, pour tout $i, j \in \{0, 1, ..., n\}$, on a

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq i, \\ 1 & si\ j = i. \end{cases}$$

   (c) Montrer que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (d) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

3. A la famille $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on associe le polynôme $Y = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

   (a) Que vaut $Y(x_j)$, pour $j \in \{0, 1, ..., n\}$.

(b) Montrer que

$$\min_{P\in\mathbb{R}_m[X]} \Psi_m(P) = \min_{P\in\mathbb{R}_m[X]} \|Y-P\|^2.$$

(c) En déduire que P_m, défini dans la question **A**-6, est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_m[X]$.

4. On définit une suite $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ par récurrence:

$$\begin{cases} Q_0 = 1, \\ Q_k = X^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{< X^k, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i, \quad k = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

(a) Calculer Q_1.

(b) Vérifier que chaque polynôme Q_k est de degré k.

(c) Montrer la relation d'orthogonalité :

$$\forall\, k,\, k' \in \{0, 1, ..., n\}\, et\; k \neq k', \quad < Q_k, Q_{k'} >= 0.$$

(d) Conclure que la famille $\{Q_0, Q_1, ..., Q_n\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on pose $H_k(X) = Q_k(x_n - X)$ (le polynôme associé à la fonction polynômiale $x \mapsto Q_k(x_n - x)$).

i. Montrer que, pour tout $j = 0, 1, ..., (k-1)$, on a $< H_k, X^j >= 0$.

ii. En déduire que H_k est orthogonal au sous espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

iii. Trouver une relation entre les polynômes H_k et Q_k.

(f) i. Vérifier que

$$< P_m, Q_i >=< Y, Q_i >, \qquad \forall\, i = 0, 1, ..., m.$$

ii. Montrer que

$$P_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{< Y, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i.$$

iii. En déduire que, pour tout $m \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\begin{cases} P_m = P_{m-1} + \dfrac{< Y, Q_m >}{\|Q_m\|^2} Q_m, \\ \\ \delta_m = \delta_{m-1} - \dfrac{(< Y, Q_m >)^2}{\|Q_m\|^2}. \end{cases} \tag{S3}$$

iv. Que peut-on dire de P_n et δ_n?

- C - Exemple

Soit $n = 3$. On prend $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 2$.

1. Pour $m = 0$, trouver P_0 et δ_0 (on pourra utiliser le système $(S2)$).

2. Pour $m = 1$, trouver P_1 et δ_1 (on pourra utiliser le système $(S3)$).

3. Tracer sur le même graphique les deux fonctions polynômiales $P_0(x)$ et $P_1(x)$ avec la suite des points $(i, y_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$.