CORRECTION MATH II
Session 2002

Partie I

2 1. (a) $v^m \in \operatorname{Ker} \varphi_u \iff v^m u = u v^m$. Le résultat est vrai pour $m = 1$ puisque $v \in \operatorname{Ker} \varphi_u$. On suppose que $v^m \in \operatorname{Ker} \varphi_u$, alors $v^{m+1} u = v v^m u = v u v^m = u v v^m = u v^{m+1}$. Donc $v^{m+1} u = u v^{m+1}$, ce qui démontre le résultat.

---

2 (b) On suppose que $v \in \operatorname{Ker} \varphi_u$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(X) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, donc $P(v) = \sum_{j=0}^{m} a_j v^j$. Comme chaque $v^j \in \operatorname{Ker} \varphi_u$ et que $\operatorname{Ker} \varphi_u$ est un sous-espace vectoriel, alors $P(v) \in \operatorname{Ker} \varphi_u$.

---

1 2. $v \in \operatorname{Ker} \varphi_u \iff uv = vu \iff u \in \operatorname{Ker} \varphi_v$.

---

2 Si $v \in \operatorname{Ker} \varphi_u$, alors d'après ce qui précède pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(v) \in \operatorname{Ker} \varphi_u \Rightarrow u \in \operatorname{Ker} \varphi_{P(v)}$. Donc pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(u) \in \operatorname{Ker} \varphi_{P(v)} \Rightarrow P(v)Q(u) = Q(u)P(v)$.

1 Si $x \in \operatorname{Ker} Q(u)$, alors $Q(u)\Big(P(v)(x)\Big) = P(v)Q(u)(x) = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par $P(v)$.

---

1 3. Si $u^* = P(u)$, alors $u^* u = P(u)u = uP(u) = uu^*$. Donc u est normal.

---

1 4. (a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Comme u est normal, alors $u \in \operatorname{Ker} \varphi_{u^*}$, donc $P(u)Q(u^*) = Q(u^*)P(u)$.

1 Dans le cas où $Q = P$, ceci nous donne que $P(u)$ est un endomorphisme normal.

---

2 (b) Soit $x \in E$, alors $||u^*(x)||^2 = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \langle x, uu^*(x) \rangle = \langle x, u^* u(x) \rangle = ||u(x)||^2$.

---

1 $x \in \operatorname{Ker} u \iff ||u(x)|| = 0 \iff ||u^*(x)|| = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} u^*$, donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$.

2 $x \in \operatorname{Ker} u^* u \Rightarrow \langle u^* u(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u$. Il est évident que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^* u$.

---

2 Montrons que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$. Il est évident que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$, alors $u(x) \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$, donc $0 = \langle u^* u(x), x \rangle = ||u(x)||^2$. Il en résulte que

2 Ker u = Ker u^2. On suppose que Ker u = Ker u^m pour un $m \geq 2$ et montrons que Ker u = Ker u^{m+1}. Il suffit de montrer que Ker $u^{m+1} \subset$ Ker u. Soit $x \in$ Ker u^{m+1}, alors $u^{m-1}(x) \in$ Ker u^2 = Ker u, donc $x \in$ Ker u^m.

---

2 1 (c) On a montré que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u)$ est normal. Donc Ker $P^m(u)$ = Ker $P(u)$ = Ker $P(u^*)$.

---

2 (d) Si u est un endomorphisme normal nilpotent de E, alors Ker u = Ker $u^n = E$, donc u est l'endomorphisme nul.

Partie II

A)

1 1. Soit v un endomorphisme de E antisymétrique et soit $x \in E$. Alors $\langle v(x), x\rangle = \langle x, v^*(x)\rangle = -\langle x, v(x)\rangle = \langle v(x), x\rangle$. Donc $\langle v(x), x\rangle = 0$.

---

2 Inversement si pour tout $x \in E$, $\langle v(x), x\rangle = 0$, alors pour tous $x, y \in E$, $\langle v(x+y), x+y\rangle = 0$. Donc pour tous $x, y \in E$, $\langle (v+v^*)(x), y\rangle = 0$. Il en résulte que $v + v^* = 0$.

---

2. Soit v un endomorphisme antisymétrique non nul de E.

2 (a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de v dans $\mathcal{B}$, alors ${}^tA$ est la matrice de v^* dans $\mathcal{B}$.

Comme ${}^tA = -A$, alors A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$, avec $w \neq 0$, car v est non nul.

---

1 La matrice de v^2 est A^2, donc $v^2 = -w^2\,\mathrm{Id}$.

(b) Soit e un vecteur de E de norme 1.

2 1 Comme v n'admet pas de valeur propre réelle, alors $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est un système libre. De plus $\langle e, \frac{1}{|w|}v(e)\rangle = 0$, d'après ce qui précède, donc $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est une base orthonormée de E. La matrice de v dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & -|w| \\ |w| & 0 \end{pmatrix}$.

Soit u un endomorphisme de E et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

---

3. u est normal si, et seulement, si $A{}^tA = {}^tAA$. Or ${}^tAA = \begin{pmatrix} \alpha^2+\gamma^2 & \alpha\beta+\gamma\delta \\ \alpha\beta+\gamma\delta & \beta^2+\delta^2 \end{pmatrix}$ et

2 $A{}^tA = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha\gamma+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\beta\delta & \gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix}$. Donc $A{}^tA = {}^tAA$ est équivalent à $(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)=0$ et $(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)=0$.

---

2 4. (a) Si $\beta = \gamma$, alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Donc A est symétrique, et comme la base est orthonormée, alors l'endomorphisme u est symétrique.

---

1 (b) Si $\beta \neq \gamma$, alors les équations précédentes donnent : $\gamma = -\beta \neq 0$ et $\alpha = \delta$. Le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X-\alpha)^2 + \beta^2$. Comme $\beta \neq \gamma$, donc $\beta \neq 0$ et donc u n'admet pas de valeurs propres réelles. Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels

1 que $\alpha + i\beta = re^{i\theta}$, et donc $A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

B)

Soit u un endomorphisme normal et soit P_u son polynôme caractéristique.

---

1. Si P_u est scindé sur $\mathbb{R}$, alors u admet au moins une valeur propre réelle α. Si e est un vecteur propre normé de u pour la valeur propre α et si e' est un vecteur orthogonal à

2 e normé, alors il existe β et γ deux réels tels que $u(e') = \beta e + \gamma e'$. Donc la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

1 Comme u est normal et (e, e') est une base orthonormée, alors ${}^tAA = A{}^tA$, ce qui donne que $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Il en résulte que u est symétrique.

---

2. (a) On suppose que P_u n'admet pas de racines réelles. Comme P_u est un polynôme de

2 degré 2 et unitaire, alors $P_u(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$, avec (α, β) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. β ne peut pas être nul vu que le polynôme P_u n'est pas scindé. Le couple est unique.

2 Comme $P_u(0) = \det u = \beta^2 \neq 0$, donc u est inversible.

---

2 (b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$, comme u est inversible, alors $u(x) \neq 0$. De plus $u(x)$ n'est pas colinéaire à x car u n'admet pas de valeurs propres réelles. Donc $(x, u(x))$ est une base de E.

2 Si $F \neq \{0\}$ est un sous-espace de E, stable par u, alors si $x \in F \setminus \{0\}$, le système $(x, u(x))$ est une base de E et c'est un système libre de F, donc $F = E$.

2 (c) L'endomorphisme $u + u^*$ est symétrique, donc il est même diagonalisable dans une base orthonormée.

---

1 (d) Soit λ une valeur propre de $u + u^*$. On pose $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u + u^* - \lambda\,\mathrm{Id})$. Si $x \in E_\lambda$, alors $(u + u^* - \lambda\,\mathrm{Id})(u(x)) = (u^2 + u^*u - \lambda\,\mathrm{Id})(x) = u(u + u^* - \lambda\,\mathrm{Id})(x) = 0$. Donc E_λ est stable par u.

---

1 D'après ce qui précède $E_\lambda = E$. Donc $u + u^* = \lambda\,\mathrm{Id}$. Si $\lambda = 2\mu$, alors $u + u^* = 2\mu\,\mathrm{Id}$. ($u^* = -u + 2\mu\,\mathrm{Id}$.)

---

1 3. (a) $u - u^*$ est antisymétrique, donc d'après les résultats de la partie II) A), il existe $\gamma > 0$ tel que $(u - u^*)^2 = -4\gamma^2\,\mathrm{Id}$.

---

3 (b) D'après ce qui précède, il existe une base orthonormée (e, e') de E telle que dans la quelle la matrice de $u - u^*$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -2\gamma \\ 2\gamma & 0 \end{pmatrix}$. Comme $u + u^* = 2\mu\,\mathrm{Id}$ et c'est indépendant de la base. Comme $u = \dfrac{1}{2}((u + u^*) + (u - u^*))$, donc dans la base (e, e'), la matrice de u est $\begin{pmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$.

---

1 (c) Si $r = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} > 0$ et θ est l'argument du nombre complexe $\mu + i\gamma$, alors $\frac{1}{r}u$ est la rotation d'angle θ.

Partie III

1. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre-eux.

1 (a) Si $x \in \mathrm{Ker}\, Q(u)$, alors $QR(u)(x) = RQ(u)(x) = 0$, donc $R(u)$ laisse stable $\mathrm{Ker}\, Q(u)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, Q(u) \cap \mathrm{Ker}\, R(u)$, alors d'après l'identité de Bezout il existe deux polynômes R_1 et Q_1 tels que $R_1R + Q_1Q = 1$, donc $(R_1R + Q_1Q)(u)(x) = x$. Comme $R_1R(u)(x) = 0$ et $(Q_1Q)(u)(x) = 0$, donc $x = 0$.

2

---

2 (b) Il résulte de la question précédente que $\dim R(u)(\mathrm{Ker}\, Q(u)) = \dim \mathrm{Ker}\, Q(u)$, donc $R(u)(\mathrm{Ker}\, Q(u)) = \mathrm{Ker}\, Q(u)$.

3

Soient $x \in \operatorname{Ker} Q(u)$ et $y \in \operatorname{Ker} R(u) = \operatorname{Ker} R(u^*)$, alors il existe $x_1 \in \operatorname{Ker} Q(u)$ tel que $x = R(u)(x_1)$. Donc $\langle x, y\rangle = \langle R(u)(x_1), y\rangle = \langle x_1, R(u^*)y\rangle = 0$, car $R(u^*)y = 0$. Donc les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} Q(u)$ et $\operatorname{Ker} R(u)$ sont orthogonaux.

3

2. (a) $Q_j(u)$ est un endomorphisme normal, donc $\operatorname{Ker} Q_j^m(u) = \operatorname{Ker} Q_j(u)$, donc

$$E = \operatorname{Ker} Q_1(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} Q_2(u).$$

2

(b) Si $\deg Q_1 = 1$ et $\deg Q_2 = 1$, alors E est somme directe des sous-espaces propres, donc u est diagonalisable dans une base orthonormée (car les sous-espaces propres sont orthogonaux), et donc u est symétrique.

2

(c) i) Il est évident que $u(e) \in F$ et comme $u^2(e) = -au(e) - be$, donc $u^2(e) \in F$. De plus $u^*(e) = u(e)$ et $u^*(u(e)) = uu^*(e) = u(u((e))$. Donc $u^* = u$ sur F.

2

ii) Si la restriction de $u - u^*$ sur $\operatorname{Ker} Q_2(u)$ n'est pas injective, alors u est symétrique sur F. Il en résulte que la restriction de u sur $\operatorname{Ker} Q_2(u)$ admet une valeur propre, ce qui est impossible.

2

Pour $x \in \operatorname{Ker} Q_2(u), on a:\ 0 = Q_2(u)(x) = u^2(x) + au(x) + bx = (u^*)^2(x) + au^*(x) + bx$. Il en résulte que $(u - u^*)(u + u^* + a\operatorname{Id})(x) = 0$. Comme la restriction de $u - u^*$ à $\operatorname{Ker} Q_2(u)$ est injective, alors $u^*(x) = -u(x) - ax$.

2

(d) Il existe deux polynômes R_1 et R_2 tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$, donc $R_1(u)Q_1(u) + R_2(u)Q_2(u) = \operatorname{Id}$. Pour $x \in E$, il existe $x_1 \in \operatorname{Ker} Q_1(u)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} Q_2(u)$ uniques tels que $x = x_1 + x_2$. ($x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$.)

2

Si on pose $x_1 = R_2(u)Q_2(u)(x)$ et $x_2 = R_1(u)Q_1(u)(x)$, alors d'après ce qui précède, $x = x_1 + x_2$. De plus $Q_1(u)(x_1) = R_2(u)P_u(u)(x) = 0$, car $P_u(u) = 0$. (Théorème de Cayley Hamilton). Donc $p_1 = S_1(u)$ et $p_2 = S_2(u)$, avec $S_1 = R_2Q_2$ et $S_2 = R_1Q_1$.

4

(e) Il résulte de ce qui précède que $u^* \circ p_1$ est un polynôme de $u \circ p_1$ et $u^* \circ p_2$ est un polynôme de $u \circ p_2$. Comme $u^* = u^* \circ p_1 + u^* \circ p_2$, donc il existe un polynôme T tel que $u^* = T(u)$, car $p_1 = S_1(u)$ et $p_2 = S_2(u)$.

1

3. (a) ${}^tAA = A{}^tA = \operatorname{Id}$.

---

1 (b) $P(X) = (1-X)(X^2+1)$.

---

4 (c) Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A relativement à le base canonique.

Les deux polynômes $1-X$ et X^2+1 sont premiers entre eux. L'identité de Bezout donne $\frac{1}{2}(X^2+1)+\frac{1}{2}(X+1)(1-X)=1$. Si $Q_1(X)=1-X$ et $Q_2(X)=X^2+1$, alors d'après ce qui précède $p_1(u)=\frac{1}{2}(u^2+\mathrm{Id})$, $p_2(u)=\frac{1}{2}(\mathrm{Id}-u^2)$, $u^*\circ p_1 = u\circ p_1$ et $u^*\circ p_2 = -u\circ p_2$. Donc $u^*=\frac{1}{2}(u^3+u)+\frac{1}{2}(u^3-u)=u^3$. Donc ${}^tA = A^3$.

---

4. (a) Dans le cas général soit $P_u(X) = \prod_{j=1}^{k} Q_j^{m_j}(X)$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme caractéristique P_u de l'endomorphisme u.

2 Comme les endomorphismes $Q_j(u)$ sont normaux, alors $\operatorname{Ker} Q_j^{m_j}(u) = \operatorname{Ker} Q_j(u)$ et par récurrence sur k, (les deux polynômes $\prod_{j=1}^{k-1} Q_j^{m_j}(X)$ et $Q_k^{m_k}(X)$ sont premiers entre eux.)

$$E = \overset{\perp}{\underset{1\le j\le k}{\bigoplus}} \operatorname{Ker} Q_j^{m_j}(u) = \overset{\perp}{\underset{1\le j\le k}{\bigoplus}} \operatorname{Ker} Q_j(u).$$

Les sous-espaces $\operatorname{Ker} Q_j^{m_j}(u)$ sont orthogonaux deux à deux.

---

2 (b) Si P_u est scindé, alors les polynômes Q_j sont de degré 1 et donc les $\operatorname{Ker} Q_j(u)$ sont les espaces propres de u. Donc u est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui donne que u est symétrique.

---

3 (c) Si on note p_j le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker} Q_j(u)$. D'après l'identité de Bezout p_j est un polynôme en u et $u^*\circ p_j$ est un polynôme en u. Comme $u^* = \sum_{j=1}^{k} u^*\circ p_j$, alors u^* est un polynôme en u.