Concours en Mathématiques Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques II

Session : Juin 2004

Partie I

---

1)$(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée $\Rightarrow \exists j \in \{1,...,n\}$ tel que u_j s'écrit

$$u_j = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \alpha_k u_k.$$

Ainsi la j^{eme} colonne de la matrice $G(u_1,...,u_n)$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres colonnes. d'où $g(u_1,...,u_n)=0$.

---

2) a)

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} < u_i/u_j > e_j = f(e_i).$$

$\Rightarrow$

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \text{ avec } a_{i,j} =< e_i, u_j >$$

$\Rightarrow$

$${}^tAA = G(u_1,...,u_n).$$

---

b) A inversible $\Rightarrow {}^tAA$ inversible $\Rightarrow rg(G(u_1,...u_n)) = n$.

---

c) $rg(G(u_1,...,u_n)) = n \Rightarrow g(u_1,...,u_n) \neq 0$ et $g(u_1,...,u_n) = (detA)^2 > 0$.

---

3) a) $\mathcal{A} = \mathcal{M}(b,\mathcal{B}$. b est symétrique $\Rightarrow$ la matrice $\mathcal{A}$ est symétrique. Il existe alors D diagonale et P orthogonale telles que

$${}^tP\mathcal{A}P = D.$$

---

b)

$$\mathcal{Q} = P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}_1}.$$
$$\mathcal{M}(b,\mathbf{B}_1) =^t \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}.$$

---

c)

$$P = P_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}'}.$$
$$\mathcal{M}(b,\mathbf{B}') =^t \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P} = D.$$

---

d)

$$G(v_1, ..., v_n) =^t AA$$

oò A est la matrice dans la base $(u_1, ..., u_n)$ de l'endomorphisme f de H tel que $f(u_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq n$. donc on a

$$P = P_{\mathbf{B} \to \mathbf{B'}} \text{ et } G(v_1, ..., v_n) =^t PP = I.$$

---

e)

$$G(v_1, ..., v_n) = I \Rightarrow < v_i/v_j >= 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } < v_i/v_i >= 1$$

$\Rightarrow (v_1, ..., v_n)$ est orthogonale pour $< / >$
$\mathcal{M}(b, \mathbf{B'}) = D \Rightarrow$ pour $i \neq j$, $b(v_i, v_j) = 0$.

Partie II

---

1) a) Soit $y \in F$.

$$\forall t \in R,\ z + ty \in F$$

$\Rightarrow$

$$\|a - z - ty\|^2 \geq \|a - z|^2.$$

$\Rightarrow$

$$\|a - z\|^2 + t^2\|y\|^2 - 2t < a - z/y > \geq \|a - z\|^2$$

$\Rightarrow$

$$2t < a - z/y > \leq t^2\|y\|^2 \ ,\ \forall t \in R$$

$\Rightarrow$

$$< a - z/y >= 0$$

$\Rightarrow$

$$a - z \in F^\perp.$$

Reciproquement, si $a - z \in F^\perp$.
Si $z = a$ alors $a \in F$ et $\|a - z| = 0 = d(a, F)$.
Si $z \neq a$, soit $y \in F$.

$$\|a - z\|^2 =< a - z/a - z >=< a - y + y - z/a - z >=$$

$$< a - y/a - z > + < y - z/a - z >=< a - y/a - z > \leq \|a - y\|\|a - z\|.$$

$\Rightarrow$

$$\|a - z\| \leq \|a - y\|$$

d'où

$$a - z\| = \inf_{y \in F} \|a - y| = d(a, F).$$

---

b) Supposons qu'il existe z, z' éléments de F tels que

$$\|a - z\| = \|a - z'\| = d(a, F).$$

on a alors :

$$\|z - z'\|^2 =< z - z'/z - z' >=< z - a + a - z'/z - z' >= 0$$

$$z = z'.$$

---

2) a) Soit $x \in E$. On note $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de F. et $y = \sum_{i=1}^{n} < x/e_i$ $e_i \in F$.

$$< x - y/e_j >=< x/e_j > - < x/e_j >= 0 \ , \forall 1 \leq j \leq n.$$

$\Rightarrow x - y \in F^{\perp}$
$\Rightarrow x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$.
D'autre part, soit $x \in F \bigcap F^{\perp}$.
$< x/x >= 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$ et

$$F \oplus F^{\perp} = E.$$

---

b) Soit $x \in E$, il existe un unique $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.
On a $x - y \in F^{\perp}$ et $y \in F \Rightarrow \|x - y| = d(x, F)$.

---

c) $x - y$ vérifie, pour $1 \leq j \leq n$,

$$< x - y/e_j >= 0$$

$\Rightarrow$

$$< x/e_j >=< \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, e_j >$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} < e_i/e_j > y_i =< x/e_j >$$

$\Rightarrow$

$$G(e_1, e_2, ..., e_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < x/e_1 > \\ < x/e_2 > \\ \vdots \\ < x/e_n > \end{pmatrix}.$$

---

d) i)

$$\begin{aligned} < x/x > &=< x - \Pi_F(x) + \Pi_F(x)/x - \Pi_F(x) + \Pi_F(x) > \\ &= \|x - \Pi_F(x)^2 + < \Pi_F(x)/\Pi_F(x) > \\ &= (d(x, \Pi_F(x)))^2 + < \Pi_F(x)/\Pi_F(x) > . \end{aligned}$$

---

ii)

$$< e_i/x >=< e_i/x - \Pi_F(x) + \Pi_F(x) >=< e_i/\Pi_F(x) > .$$

$$g(e_1,...e_n,x)=\begin{vmatrix} <e_1/e_1> & <e_1/e_2> & \dots & <e_1/e_n> & <e_1/x> \\ <e_2/e_1> & <e_2/e_2> & \dots & <e_2/e_n> & <e_2/x> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ <e_n/e_1> & <e_n/e_2> & \dots & <e_n/e_n> & <e_n/x> \\ <x/e_1> & <x/e_2> & \dots & <x/e_n> & <x/x> \end{vmatrix}$$

On écrit la dernière colonne sous la forme :

$$\begin{pmatrix} <e_1/x> \\ \vdots \\ <e_n/x> \\ <x/x> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <e_1/\Pi_F(x)> \\ \vdots \\ <e_n/\Pi_F(x)> \\ <\Pi_F(x)/\Pi_F(x)> \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (d(x,F))^2 \end{pmatrix}$$

et on utilise la linérité du déterminant par rapport à la dernière colonne, on trouve :

$$g(e_1,...e_n,x)=\begin{vmatrix} <e_1/e_1> & <e_1/e_2> & \dots & <e_1/e_n> & 0 \\ <e_2/e_1> & <e_2/e_2> & \dots & <e_2/e_n> & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ <e_n/e_1> & <e_n/e_2> & \dots & <e_n/e_n> & 0 \\ <x/e_1> & <x/e_2> & \dots & <x/e_n> & (d(x,F))^2 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} <e_1/e_1> & <e_1/e_2> & \dots & <e_1/e_n> & <e_1/\Pi_F(x)> \\ <e_2/e_1> & <e_2/e_2> & \dots & <e_2/e_n> & <e_2/\Pi_F(x)> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ <e_n/e_1> & <e_n/e_2> & \dots & <e_n/e_n> & <e_n/\Pi_F(x)> \\ <x/e_1> & <x/e_2> & \dots & <x/e_n> & <\Pi_F(x)/\Pi_F(x)> \end{vmatrix}$$

On développe ensuite le premier développement par rapport à la dernière colonne et on remarque que la dernière colonne dans le second déterminant s'écrit comme une combinaison linéaire des autres colonnes, on trouve :

$$g(e_1,...,e_n,x)=(d(x,F))^2 g(e_1,...,e_n).$$

---

iv) d'après iii) on a :

$$d(x,F)=\sqrt{\frac{g(e_1,...,e_n,x)}{g(e_1,...,e_n)}}$$

---

3) a)

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=<x+y/x+y>+<x-y/x-y>=$$
$$\|x|^2+\|y\|^2+2<x/y>+\|x\|^2+\|y\|^2-2<x/y>=$$
$$2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

---

b)

$$d(a,F)=\inf_{y\in F}\|a-y\|$$

$\Rightarrow$, $\forall n\in N$, il existe $y_n\in F$ tel que :

$$d(a,F)\leq\|a-y_n\|\leq d(a,F)+\frac{1}{n+1},$$

et on a alors :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|a - y_n\| = d(a, F).$$

---

c)

$$2(\|y_{n+p} - a\|^2 + \|y_n - a\|^2) = \|y_{n+p} + y_n - 2a\|^2 + \|y_{n+p} - y_n\|^2$$

$\Rightarrow$

$$\|y_{n+p} - y_n\|^2 = 2(\|y_{n+p} - a\|^2 + \|y_n - a\|^2) - \|y_{n+p} + y_n - 2a\|^2.$$

Le terme à droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
$\Rightarrow (y_n)_{n \in N}$ est de Cauchy dans F
$\Rightarrow (y_n)_{n \in N}$ converge dans F.

---

d) Soit $b \in F$ tel que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = b$. On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|a - y_n\| = d(a, F)$$

$\Rightarrow$

$$\|a - b\| = d(a, F).$$

---

4)a)

$$Q = \sum i = 0^p \alpha_i X^i \in H^\perp.$$

On a : $\forall j \in N,\ X^j - X^{j+1} \in H \Rightarrow$

$$\forall j \in N, \ \ < Q/X^j - X^{j+1} >= 0$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p.$$

---

b)

$$Q = \alpha_0(1 + X + \ldots + X^p)$$

$$P = \alpha_0(1 + X + \ldots + X^p) - \alpha_0(p+1)X^{p+1} \in H$$

$$< Q/P >= 0$$

$\Rightarrow$

$$< Q/Q - \alpha_0(p+1)X^{p+1} >= 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_0^2 - \alpha_0(p+1) < Q/X^{p+1} >= 0$$

$\Rightarrow \ (p+1)\alpha_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \Rightarrow Q = 0.$

---

c) On a

$$H^\perp = \{0\} \text{ et } H \neq E \text{ car } 1 + X \notin H$$

$\Rightarrow$

$$H \oplus H^\perp \neq E.$$

Partie III

1) $F \neq \emptyset$.
Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in R$.
$f \in F \Rightarrow$ il existe $n_1 \in N$ tel que $f \in F_{n_1}$.
$g \in F \Rightarrow$ il existe $n_2 \in N$ tel que $g \in F_{n_2}$.
On suppose que $n_1 \leq n_2$, on a alors $f + \lambda g \in F_{n_2} \subset F$.
d'où F est un sous-espace vectoriel.

---

2) a) i) $e_p \in E = \overline{F}$
$\Rightarrow$
pour $\epsilon > 0$, il existe $P \in F$ tel que $\|P - e_p\|_2 < \epsilon$.
Or $P \in F \Rightarrow$ il existe $n_0 \in N$ tel que $P \in F_{n_0}$
d'où, il existe $P \in F_{n_0}$ tel que $\|P - e_p\|_2 < \epsilon$.

---

ii)

$$P \in F_{n_0} \ \Rightarrow\ \forall n \geq n_0\ ,\ P \in F_n$$

d'où

$$\forall n \geq n_0\ ,\ d(e_p, F_n) \leq \|e_p - P\|_2 < \epsilon.$$

---

b)

$$d(e_p, F_n) = \sqrt{\frac{g(\psi_0, ..., \psi_n, e_p)}{g(\psi_0, ..., \psi_n)}}$$

$\Rightarrow$
$\forall \epsilon > 0,$ il existe $n_0 \in N$ tel que $\forall n \geq n_0,$

$$\frac{g(\psi_0, ..., \psi_n, e_p)}{g(\psi_0, ..., \psi_n)} \leq \epsilon^2.$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{g(\psi_0, ..., \psi_n, e_p)}{g(\psi_0, ..., \psi_n)} = 0.$$

---

3) a) On sait que :

$$d(e_p, F_n) = \sqrt{\frac{g(\psi_0, ..., \psi_n, e_p)}{g(\psi_0, ..., \psi_n)}}$$

donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(e_p, F_n) = 0,\ \forall p \in N.$$

---

b) $P \in R[X] \Rightarrow$ il existe $n_0 \in N$ tel que $P \in R_{n_0}[X]$ et P s'écrit : $P = \sum_{p=0}^{n_0} \alpha_p e_p$

$$d(P, F_n) = \|P - \Pi_{F_n}(P)\|_2 = \|\sum_{p=0}^{n_0} \alpha_p e_p - \Pi_{F_n}(\sum_{p=0}^{n_0} \alpha_p e_p)\|_2$$

et d'après la linéarité de Π_{F_n}, on trouve :

$$d(P, F_n) = \| \sum_{p=0}^{n_0} \alpha_p (e_p - \Pi_{F_n}(e_p)\|_2 \leq$$

$$\sum_{p=0}^{n_0} |\alpha_p| \|e_p - \Pi_{F_n}(e_p)\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n_0} |\alpha_p| d(e_p, F_n)$$

$\Rightarrow$

$$\forall P \in R[X] \ , \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} d(P, F_n) = 0.$$

---

c) i) d'après le théorème d'approximation de Weierstrass,

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe } P \in R[X] \text{ tel que } \|f - P\|_\infty < \epsilon.$$

---

ii) On a

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty < \epsilon.$$

---

iii)

$$P \in R[X] \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} d(P, F_n) = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\text{il existe } n_0 \in N \text{ tel que } d(P, F_{n_0}) < \epsilon$$

---

iv)

$$\begin{aligned} P_0 &= \Pi_{F_{n_0}}(P) \in F_{n_0}. \\ \|f - P_0\|_2 &= \|f - P + P - P_0\|_2 \\ &< \|f - P\|_2 + \|P - P_0\|_2 \\ &< \|f - P\|_2 + \|P - \Pi_{F_{n_0}}(P)\|_2 \\ &< \epsilon + d(P, F_n) \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

---

d) d'après iv) $\forall f \in E$ et $\forall \epsilon > 0$, il existe $P_0 \in F_{n_0} \subset F$ tel que $\|f - P_0\|_2 < 2\epsilon$.
On a donc $f \in \overline{F}$ et :

$$\overline{F} = E.$$