

Concours Mathématiques et Physique
Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques II

I - Norme matricielle

Soit

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n; \text{ tel que } \|X\|_2 = 1\}$$

On note $\|A\|_2 = \sup_{X \in S} (\|AX\|_2)$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ alors $Y = \frac{X}{\|X\|_2} \in S$. Donc $\frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \|MY\|_2 \leq \|M\|_2$. D'où $\|MX\|_2 \leq \|M\|_2 \|X\|_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

(a) $\|A\|_2 = 0$ ca implique que $\|AX\|_2 = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. D'où $AX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ car $\|\cdot\|_2$ est une norme. Donc $A = 0$

(b) $\|\lambda A\|_2 = \sup_{X \in S} (\|\lambda AX\|_2) = |\lambda| \sup_{X \in S} (\|AX\|_2)$ car $\|\cdot\|_2$ est une norme. D'où $\|\lambda A\|_2 = |\lambda| \|A\|_2$

(c) $\|A + B\|_2 = \sup_{X \in S} (\|AX + BX\|_2) \leq \sup_{X \in S} (\|AX\|_2) + \sup_{X \in S} (\|BX\|_2) = \|A\|_2 + \|B\|_2$

3.

$$\begin{aligned} \|A \cdot B\|_2 &= \sup_{X \in S} (\|A \cdot BX\|_2) \\ &= \sup_{X \in S} \left(\frac{\|A \cdot BX\|_2}{\|BX\|_2} \|BX\|_2 \right) \\ &\leq \sup_{Y \in S} (\|AY\|_2) \sup_{X \in S} (\|BX\|_2) \\ &\leq \|A\|_2 \|B\|_2. \end{aligned}$$

4. Soit $U \in \mathcal{O}(n)$.

$$\begin{aligned} \|MU\|_2 &= \sup_{X \in S} (\|M \cdot UX\|_2) \\ &= \sup_{Y \in S} (\|MY\|_2) = \|M\|_2 \end{aligned}$$

$$\text{car } \|UX\|_2 = \|Y\|_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \|UM\|_2 &= \sup_{X \in S} (\|U \cdot MX\|_2) \\ &= \sup_{X \in S} (\|MX\|_2) = \|M\|_2 \end{aligned}$$

$$\text{car } \|U \cdot MX\|_2 = \|MX\|_2.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et V le vecteur propre unitaire associé. On a alors

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in S} (\|AX\|_2) \geq |\lambda|$$

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|B\|_2 = r < 1$. Soit $S_N = \sum_{k=0}^N B^k$.

- (a) Montrer que S_N est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munie de la norme $\|\cdot\|_2$.

$$\forall N, \forall M, N > M, \quad \|S_N - S_M\|_2 = \left\| \sum_{k=M+1}^N B^k \right\|_2 \leq \sum_{k=M+1}^N \|B\|_2^k$$

et que $\|B\|_2 < 1$ (une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 est de Cauchy).

- (b) La suite S_N est convergente dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)^1$, puisqu'elle est de Cauchy. Notons S la limite de S_N .
- (c) Calculer $S_N(I - B)$ et $(I - B)S_N$.

$$S_N(I - B) = \sum_{k=0}^N B^k - \sum_{k=0}^N B^{k+1} = I - B^{N+1} \quad (1)$$

De même, on a

$$(I - B)S_N = I - B^{N+1} \quad (2)$$

- (d) On a

$$\|S_N\|_2 \leq \sum_{k=0}^N \|B\|_2^k = \frac{1 - \|B\|_2^{N+1}}{1 - \|B\|_2}$$

En passant à la limite, lorsque $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$S(I - B) = (I - B)S = I$$

Ainsi, $I - B$ est inversible et

$$(I - B)^{-1} = S = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$$

7. Si $I - B$ est non inversible, alors 1 est une valeur propre de B , et par suite on a $\|B\|_2 \geq 1$, puisque $\rho(B) \geq 1$ et d'après la question 5. on a $\|B\|_2 \geq \rho(B)$.

II - Propriétés des matrices symétriques positives

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

1. Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors il existe n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité et une base de vecteurs propres orthonormales et A est diagonalisable avec la diagonale formé par les valeurs propres de A . La matrice P représente la matrice de passage de la base canonique à la base (V_1, V_2, \dots, V_n) .

¹ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ est un espace vectoriel normé.

2. Comme A est positive alors les valeurs propres sont positives.

3. Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées suivant l'ordre croissant et (V_1, \dots, V_n) les vecteurs propres orthogonaux qui leur sont associés. On pose

$$q_A(X) = (AX, X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$$

(a) On décompose X dans la base (V_1, \dots, V_n) . $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$. D'où $AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i V_i$

$$q_A(X) = (AX, X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \|V_i\|_2^2$$

Comme $\lambda_i \leq \lambda_n$ on trouve $q_A(X) \leq \lambda_n \|X\|_2^2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

(b) Comme $\lambda_i \geq \lambda_1$ on trouve $q_A(X) \geq \lambda_1 \|X\|_2^2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

(c) Comme $\|X\|_2^2 = 1$ sur S ça implique $\lambda_1 \leq q_A(X) \leq \lambda_n$ sur S .

(d) Si $AX = \lambda_n X$ alors $(AX, X) = \lambda_n \|X\|_2^2$. Si $(AX, X) = \lambda_n \|X\|_2^2$ comme $(AX, X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \|V_i\|_2^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 \|V_i\|_2^2$. D'où $\sum_{i=1}^n (\lambda_n - \lambda_i) x_i^2 \|V_i\|_2^2 = 0$. Comme $(\lambda_n - \lambda_i) \geq 0$ ça implique $x_i = 0$ pour $i \neq n$. D'où $AX = \lambda_n X$.

(e) Si $X = V_n$ on trouve $q_A(V_n) = \lambda_n \|V_n\|_2^2$ et si $X = V_1$ on trouve $q_A(V_1) = \lambda_1 \|V_1\|_2^2$ d'où $\inf_{X \in S} q_A(X) = \lambda_1$ et $\sup_{X \in S} q_A(X) = \lambda_n$.

4. On décompose X dans la base (V_1, \dots, V_n) . $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$. D'où $\|AX\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \|V_i\|_2^2$ d'où $\|A\|_2 \leq \lambda_n$ et comme $\|A\|_2 \geq \lambda_n$ on trouve $\|A\|_2 = \lambda_n$.

5. (a) (a) \implies (b) Cette implication est immédiate puisque l'on a

$$\|A^k v\|_2 \leq \|A^k\|_2 \|v\|_2$$

pour tout v dans \mathbb{R}^n et $k \in \mathbb{N}$.

(b) (b) \implies (c) Montrons cette implication par l'absurde. Supposons que $\rho(A) \geq 1$, cela entraîne qu'ils existent $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \geq 1$ et $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pour lesquels on a

$$Ap = \lambda p$$

d'où

$$\|A^k p\|_2 = |\lambda|^k \|p\|_2 \geq \|p\|_2 > 0$$

par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k p\|_2 \neq 0$$

et la propriété ii) ne serait pas vérifiée.

(c) (c) \implies (d)) trivial

(d) (d) \implies (a)

On a

$$0 \leq \|A^k\|_2 \leq \|A\|_2^k$$

On en déduit puisque $\|A\|_2 < 1$, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2 = 0$$

c'est-à-dire A^k que tend vers 0, quand k tend vers $+\infty$.

6. Soit $\gamma \in \mathbb{R}^+$ et $B(\gamma) = I - \gamma A$.

(a) les valeurs propres de $B(\gamma)$ sont $\mu_i(\gamma) = 1 - \gamma\lambda_i$ de $1 \leq i \leq n$, en fonction de γ et des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$.

(b) On définit

$$f_i(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_i|, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+$$

et

$$f(\gamma) = \max_{1 \leq i \leq n} (f_i(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+$$

i. on a $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$. d'où $1 - \gamma\lambda_n \leq 1 - \gamma\lambda_i \leq 1 - \gamma\lambda_1$. Donc si $0 \leq 1 - \gamma\lambda_i \leq 1 - \gamma\lambda_1$ sinon $1 - \gamma\lambda_n \leq 1 - \gamma\lambda_i \leq 0$ d'où $0 \leq |1 - \gamma\lambda_i| \leq |1 - \gamma\lambda_n|$ Donc $f(\gamma) = \max(f_1(\gamma), f_n(\gamma))$.

ii. Soit D_1 la courbe d'équation $y_1(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_1|$ et D_2 la courbe d'équation $y_2(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_n|$ donc $f(\gamma) = \max(y_1(\gamma), y_2(\gamma))$ d'où γ^* est telle que $y_1(\gamma^*) = y_2(\gamma^*)$. Donc $\gamma^* > 0$ tel que

$$f(\gamma) = \begin{cases} f_1(\gamma) & \text{si } 0 \leq \gamma \leq \gamma^*, \\ f_n(\gamma) & \text{si } \gamma^* \leq \gamma \end{cases}$$

iii. Comme $\frac{1}{\lambda_n} \leq \gamma^* \leq \frac{1}{\lambda_1}$ on a $y_1(\gamma) = 1 - \gamma\lambda_1$ et $y_2(\gamma) = \gamma\lambda_n - 1$. D'où $1 - \gamma^*\lambda_1 = \gamma^*\lambda_n - 1$. On trouve $\gamma^* = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

(c) En déduire que

$$\rho(B(\gamma)) = \begin{cases} 1 - \lambda_1\gamma & \text{si } 0 \leq \gamma \leq \gamma^*, \\ \lambda_n\gamma - 1 & \text{si } \gamma \geq \gamma^*. \end{cases}$$

(d) $\rho(B(\gamma))$ est décroissante sur $[0, \gamma^*]$ puis croissante sur $[\gamma^*, +\infty[$. Donc $\rho(B(\gamma))$ atteint son minimum en γ^* et On a:

$$\rho(\gamma^*) = \min_{\gamma > 0} \rho(B(\gamma)) = 1 - \gamma^*\lambda_1 = 1 - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \lambda_1 = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}.$$

III - Valeurs singulières d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. ${}^t(tAA) = {}^t A({}^t(tA)) = {}^t AA$ est une matrice symétrique. $(tAAX, X) = (AX, AX) = \|AX\|_2^2 \geq 0$. D'où tAA est positive.

2. D'après la partie II, Comme tAA est symétrique il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice D une matrice diagonale telles que

$${}^tAA = {}^t PDP$$

avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et où les λ_i sont les valeurs propres de tAA . On appelle valeurs singulières de A le nombre $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

3. On a

$$\|AX\|_2^2 = (AX, AX) = ({}^tAAX, X) = q_{{}^tAA}(X)$$

d'où

$$\sigma_{\max} = \sup_{X \in S} (\|AX\|_2) = \sup_{X \in S} (\sqrt{q_{{}^tAA}(X)}) = \sqrt{\lambda_n}$$

de même pour

$$\sigma_{\min} = \inf_{X \in S} (\|AX\|_2) = \sqrt{\lambda_1}$$

où $\sigma_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i$ et $\sigma_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i$.

IV Convergence d'une méthode itérative

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} I & A \\ {}^tA & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

1. Si le vecteur $(Z, X) \in \mathbb{R}^{2n}$ est solution du système (3) alors

$$\begin{cases} Z + AX = b \\ {}^tAZ - \alpha X = 0 \end{cases}$$

La première équation nous donne

$$Z = -AX + b$$

En remplaçant dans la deuxième équation nous trouvons:

$${}^tA(-AX + b) - \alpha X = 0$$

D'où le vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ est solution de

$$({}^tAA + \alpha I)x = {}^tAb \quad (4)$$

2. Comme la matrice ${}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive alors la matrice $({}^tAA + \alpha I)$ est symétrique définie positive donc inversible. D'où il existe un unique $X \in \mathbb{R}^n$ solution de (4). D'où $Z = -AX + b$ est unique.

3. Puisque le système (3) admet une solution unique ca implique que la matrice du système (3) est inversible.

4. Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice $B(\gamma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$B(\gamma) = I - \gamma({}^tAA + \alpha I)$$

(a) Si $({}^tAA + \alpha I)X = {}^tAb$ alors en multipliant cette équation par γ et en retranchant X des deux côtés on trouve $X - \gamma({}^tAA + \alpha I)X = X - \gamma {}^tAb$ alors $X = B(\gamma)X + \gamma {}^tAb$. De même pour l'autre sens.

(b) Soit la méthode itérative:

$$\begin{cases} X^0 \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque,} \\ X^{k+1} = B(\gamma)X^k + \gamma {}^tAb. \end{cases} \quad (3.1)$$

- i. Si la suite $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X^*

$$X^* = B(\gamma)X^* + \gamma {}^t A b$$

d'après le 4.a) X^* est solution du système (4)

- ii. Supposons que $\rho(B(\gamma)) < 1$. On a

$$B(\gamma) = I - \gamma({}^t A A + \alpha I) = {}^t P(I - \gamma(D + \alpha))P$$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i sont les valeurs propres de ${}^t A A$. En utilisant le I.4 on obtient

$$\|B(\gamma)\|_2 = \|I - \gamma(D + \alpha)\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \gamma(\lambda_i + \alpha)| = \rho(B(\gamma))$$

d'où $\|B(\gamma)\|_2 < 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on a:

$$X^k - X^* = B(\gamma)X^k + \gamma {}^t A b - (B(\gamma)X^* + \gamma {}^t A b) = B(\gamma)(X^{k-1} - X^*)$$

d'où

$$X^k - X^* = B(\gamma)(X^{k-1} - X^*) = \dots = B(\gamma)^k(X^0 - X^*)$$

$$\|X^k - X^*\|_2 \leq \|B(\gamma)\|_2^k \|X^0 - X^*\|_2.$$

Comme $\|B(\gamma)\|_2 < 1$, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (X^k - X^*) = 0$$

pour tout choix $X^0 \in \mathbb{R}^n$. Réciproquement, si la suite (X^k) converge pour tout choix X^0 vers X^* solution de (4), le même raisonnement entraîne que

$$\forall X^0 \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} B^k(\gamma)(X^0 - X^*) = 0$$

autrement dit

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} B^k(\gamma)v = 0$$

On en déduit en utilisant le même raisonnement que II.5 que $\rho(B(\gamma)) < 1$.

- iii. Donner les valeurs de γ en fonction de α et les valeurs singulières de A pour que la méthode itérative (4) soit convergente.

A. Si $\gamma < 0$ alors $\rho(B(\gamma)) > 1$. D'où, d'après la question précédente, la méthode est divergente.

B. On a

$$\rho(B(\gamma)) \begin{cases} 1 - (\sigma_{\min}^2 + \alpha)\gamma & \text{si } 0 < \gamma \leq \gamma^*, \\ (\sigma_{\max}^2 + \alpha)\gamma - 1 & \text{si } \gamma \geq \gamma^*. \end{cases}$$

avec $\gamma^* = \frac{2}{\sigma_{\min}^2 + \sigma_{\max}^2 + 2\alpha}$. Comme $\rho(B(\gamma)) < 1$ on doit avoir

$$1 - (\sigma_{\min}^2 + \alpha)\gamma < 1$$

qui est vérifié si $\gamma \geq 0$.

$$(\sigma_{\max}^2 + \alpha)\gamma - 1 < 1$$

d'où

$$\gamma < \frac{2}{(\sigma_{\max}^2 + \alpha)}$$

Donc $\gamma \in]0, \frac{2}{(\sigma_{\max}^2 + \alpha)}[$

- iv. γ^* qui minimise $\rho(B(\gamma))$ est $\gamma^* = \frac{2}{\sigma_{\min}^2 + \sigma_{\max}^2 + 2\alpha}$.

Fin de l'épreuve