# Concours Mathématiques et Physique 2011
# Epreuve de Mathématiques II - Corrigé

---

## PARTIE I

### A - Etude des endomorphismes $G_u$, $D_v$ et $G_u + D_v$

1. (a) Soit $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$R(G_u)(f) = \sum_{i=0}^{m} a_i G_u^i(f) = \sum_{i=0}^{m} a_i (u^i \circ f) = \Big(\sum_{i=0}^{m} a_i u^i\Big) \circ f = R(u) \circ f = G_{R(u)}(f).$$

D'où $R(G_u) = G_{R(u)}$.

---

(b)

$$\begin{aligned} R(u) = 0 &\iff \forall f \in \mathcal{L}(E),\ R(u) \circ f = 0 \\ &\iff \forall f \in \mathcal{L}(E),\ G_{R(u)}(f) = 0 \\ &\iff G_{R(u)} = R(G_u) = 0. \end{aligned}$$

---

(c) $u$ est diagonalisable $\iff$ il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines toutes simples dans $\mathbb{C}$ tel que $Q(u) = 0 \iff$ il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines toutes simples dans $\mathbb{C}$ te que $Q(G_u) = 0 \iff G_u$ est diagonalisable.

---

2. Même raisonnement que dans 1.

---

3. (a) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(G_u \circ D_v)(f) = G_u(f \circ v) = u \circ f \circ v = D_v(u \circ f) = (D_v \circ G_u)(f)$$

et donc $G_u \circ D_v = D_v \circ G_u$.

---

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(G_u)$. Pour $g \in E_\lambda(G_u)$, montrons que $D_v(g) \in E_\lambda(G_u)$. En utilisant la question précédente, on a :

$$G_u(D_v(g)) = D_v(G_u(g)) = D_v(\lambda g) = \lambda D_v(g).$$

Donc $E_\lambda(G_u)$ est stable par $D_v$.

---

(c) $u$ et $v$ étant supposés diagonalisables, donc par 1. et 2., $G_u$ et $D_v$ sont diagonalisables. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $G_u$, alors on a :

$$\mathcal{L}(E) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(G_u).$$

Par 3.$(b)$, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}, E_{\lambda_i}(G_u)$ est stable par $D_v$. Il en résulte que la restriction $D_{v,i}$ de $D_v$ à $E_{\lambda_i}(G_u)$ est un endomorphisme diagonalisable de $E_{\lambda_i}(G_u)$. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(G_u)$ formée par des vecteurs propres de $D_{v,i}$ (donc de $D_v$). Alors $(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ formée par des vecteurs propres communs à $G_u$ et $D_v$.

(d) La matrice de $\Theta_{u,v}$ dans la base $(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$, définie dans 3. (c), est diagonale (somme de deux matrices diagonales), donc $\Theta_{u,v}$ est diagonalisable.

4. (a) • Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres de $u$. On a $v \in \ker(\Theta_{u,-u}) \iff u \circ v = v \circ u$. Alors pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$, $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par $v$ car pour tout $x \in E_{\lambda_j}(u)$, on a:

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_j x) = \lambda_j v(x).$$

• Réciproquement, si pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$, $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par $v$ alors

$$\forall z \in E_{\lambda_j}(u), \quad (u \circ v)(z) = \lambda_j v(z) = v(\lambda_j z) = (v \circ u)(z).$$

Ainsi $u$ et $v$ commutent sur tout $E_{\lambda_j}(u), 1 \leqslant j \leqslant k$, d'où $u$ et $v$ commutent sur $E = \bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j}(u)$, et $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$. En conclusion

$$\ker(\Theta_{u,-u}) = \Big\{ v \in \mathcal{L}(E);\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u),\ E_\lambda(u) \text{ est stable par } v \Big\}.$$

(b) Pour $j \in \{1, \cdots, k\}$, on note par $\mathcal{T}_j$ une base de $E_{\lambda_j}(u)$ et on pose $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_k)$. Alors $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$ si et seulement si la matrice de $v$ dans $\mathcal{T}$ est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & N_k \end{pmatrix}$$

avec $N_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ et $n_j = \dim(E_{\lambda_j}(u))$. Il en résulte que

$$\dim(\ker(\Theta_{u,-u})) = \sum_{j=1}^{k} (\dim E_{\lambda_j}(u))^2.$$

(c) i. Soient $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $x_j \in E_{\lambda_j}(u) \backslash \{0\}$. A noter que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de $E$ formée par des vecteurs propres de $u$. Comme $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par $v$ alors $v(x_j) \in E_{\lambda_j}(u)$. Mais $\lambda_j$ est une valeur propre simple, donc $\dim E_{\lambda_j}(u) = 1$ et $E_{\lambda_j}(u) = \mathrm{Vect}\{x_j\}$. Il existe alors $\mu_j \in \mathbb{C}$ tel que $v(x_j) = \mu_j x_j$ et $x_j$ est un vecteur propre de $v$.
On conclut qu'une base de vecteurs propres de $u$ est aussi base de vecteurs propres de $v$ et donc $v$ est diagonalisable.

ii. La notion des polynômes d'interpolation de Lagrange assure l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$R(\lambda_j) = \mu_j, \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on a :

$$R(u)(x_j) = R(\lambda_j) x_j = \mu_j x_j = v(x_j).$$

Comme $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de $E$, alors $R(u) = v$.

## B - Cas où $\dim(E) = 2$.

1. (a) Supposons que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
   - Pour $x = 0$, on a $u(x) = 0 = \lambda_x 0$ avec $\lambda_x$ arbitraire dans $\mathbb{K}$.
   - Pour $x, y \in E \backslash \{0\}$, montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.
     - Si $(x, y)$ est liée, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Alors,
     $$u(y) = \lambda_y y = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y.$$
     D'où$(\lambda_y - \lambda_x) y = 0 \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y$ car $y \neq 0$.
     - Si $(x, y)$ est libre, alors
     $$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$
     ce qui donne $(\lambda_{x+y} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) y = 0$ et donc $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

   Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $u$ est une homothétie vectorielle de $E$ de rapport $\lambda$; absurdité.
   En conclusion, il existe $\varepsilon_1 \in E$ tel que $(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1))$ est libre.

---

   (b) Il est clair que $\text{Vect}(\text{id}_E, u) \subset \ker(\Theta_{u,-u})$. Montrons l'autre inclusion.
   Soit $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$. $(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1))$ etant libre, elle forme une base de $E$. Il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $v(\varepsilon_1) = \alpha\varepsilon_1 + \beta u(\varepsilon_1)$. Pour tout $x \in E$, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $x = a\varepsilon_1 + bu(\varepsilon_1)$. Comme $u \circ v = v \circ u$, on aurra :
   $$\begin{aligned} v(x) &= av(\varepsilon_1) + bv(u(\varepsilon_1)) \\ &= a(\alpha\varepsilon_1 + \beta u(\varepsilon_1)) + bu(\alpha\varepsilon_1 + \beta u(\varepsilon_1)) \\ &= \alpha(a\varepsilon_1 + bu(\varepsilon_1)) + \beta u\Big(a\varepsilon_1 + bu(\varepsilon_1)\Big) \\ &= \alpha x + \beta u(x) \\ &= (\alpha \text{id}_E + \beta u)(x). \end{aligned}$$
   D'où $v = \alpha \text{id}_E + \beta u \in \text{Vect}(\text{id}_E, u)$. En conclusion, $\ker(\Theta_{u,-u}) = \text{Vect}(\text{id}_E, u)$.

---

2. Soit $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij} f_{ij} = 0$. Alors, pour tout $k \in \{1, 2\}$, on a :
$$\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij} f_{ij}(\varepsilon_k) = 0 = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij} \delta_{jk} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ik} \varepsilon_i.$$
D'où
$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_{ik} \varepsilon_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{ik} = 0, \quad \forall\, 1 \leqslant i, k \leqslant 2.$$
Donc la famille $(f_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ est libre et ayant $2^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$ éléments. Ceci prouve que $(f_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

---

3. (a) Il est clair que la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{U}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$.

(b) On calcul matriciellement et on trouve

$$\Theta_{u,-u}(f_{11}) = f_{21} - \gamma f_{12}, \quad \Theta_{u,-u}(f_{12}) = -f_{11} - \delta f_{12} + f_{22}$$

$$\Theta_{u,-u}(f_{21}) = \gamma f_{11} + \delta f_{21} - \gamma f_{22} \quad \text{et} \quad \Theta_{u,-u}(f_{22}) = \gamma f_{12} - f_{21}.$$

On en déduit que la matrice de $\Theta_{u,-u}$ dans la base $\mathcal{F} = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$ canoniquement associée à $\mathcal{U}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\Theta_{u,-u}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \gamma & 0 \\ -\gamma & -\delta & 0 & \gamma \\ 1 & 0 & \delta & -1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On a $\mathrm{Tr}(\Theta_{u,-u}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\Theta_{u,-u})) = 0$.

4. D'aprés 1. (b) $\dim\ker(\Theta_{u,-u}) = 2$, donc 0 est une valeur propre de $\Theta_{u,-u}$ de multiplicité supérieure ou égale à 2. Alors le polynôme caractéristique de $\Theta_{u,-u}$ est donné par :

$$P_{\Theta_{u,-u}}(X) = X^2(X^2 + \alpha X + \beta),$$

avec $\alpha = -\mathrm{Tr}(\Theta_{u,-u}) = 0$ et $\beta \in \mathbb{K}$. D'où $P_{\Theta_{u,-u}}(X) = X^2(X^2+\beta)$.
Remarque. En utilisant la matrice obtenue dans 3. (b), un calcule directe de $\text{dét}(\Theta_{u,-u} - X\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})$ donne le même résultat.

5. Si $\beta = 0$ alors $P_{\Theta_{u,-u}}(X) = X^4$ et donc 0 est une valeur propre de multiplicité 4. Or la dimension de l'espace propre asociée à 0 est égale à 2. Donc $\Theta_{u,-u}$ n'est pas diagonalisable.

6. Supposons que $\beta \neq 0$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\Theta_{u,-u}$ admet 0 comme valeur propre double dont le sous-espace propre associé est de dimension 2, et deux valeurs propres simples qui sont les racines carrées de $-\beta$. Donc $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors on distingue les deux cas suivants :
  - Si $\beta < 0$ alors $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable (même raisonnement que dans le cas complèxe).
  - Si $\beta > 0$ alors le polynôme $P_{\Theta_{u,-u}}$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et $\Theta_{u,-u}$ n'est pas diagonalisable.

7. (a) Si $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable alors les racines de son polynôme caractéristique sont 0 et les racines carrées (distinctes) de $-\beta$. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\Theta_{u,-u}) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ avec $\lambda = \sqrt{-\beta} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

(b) i. Comme $\Theta_{u,-u}(w_1) = \lambda w_1$ alors $w_1 \circ u = u \circ w_1 - \lambda w_1$. Pour $t \in \mathbb{K}$, on a :

$$w_1 \circ u - t w_1 = u \circ w_1 - \lambda w_1 - t w_1 \iff w_1 \circ (u - t\,\mathrm{id}_E) = (u - (\lambda + t)\mathrm{id}_E) \circ w_1.$$

---

ii. • Si $\text{dét}(w_1) \neq 0$ alors de l'identité dans 7. (b) i. on obtient

$$P_u(t) = P_u(t + \lambda), \quad \forall t \in \mathbb{K}.$$

Ceci est absurde car

$$\begin{vmatrix} -t & \gamma \\ 1 & \delta - t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(t+\lambda) & \gamma \\ 1 & \delta - (t+\lambda) \end{vmatrix} \iff t = \frac{\delta - \lambda}{2}.$$

Par conséquent $\text{dét}(w_1) = 0$. Comme par hypothèse $w_1 \neq 0$, on conclut que $rg(w_1) = 1$.

• En utilisant le fait que $\mathrm{Tr}(u \circ w_1) = \mathrm{Tr}(w_1 \circ u)$, on obtient $\mathrm{Tr}(w_1) = 0$.

• Comme $\mathrm{rg}(w_1) = 1$, alors par le théorème du rang on a $\dim\ker(w_1) = 1$. Soit $\varepsilon'_1 \in \ker(w_1)\backslash\{0\}$ et $\varepsilon'_2 \in E$ tel que $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ est une base de $E$. Alors

$$M = \mathcal{M}_{(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2)}(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{Tr}(w_1) = 0 = b$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La relation $M^2 = 0$ entraine $w_1^2 = 0$.

---

(c) i. • Si $w_1(\varepsilon_1) = 0$, de la relation $u \circ w_1 - w_1 \circ u = \lambda w_1$ on aurra $w_1(u(\varepsilon_1)) = 0$ et ainsi $w_1 = 0$. Ceci est absurde car $w_1$ est un vecteur propre de $\Theta_{u,-u}$. Donc $w_1(\varepsilon_1) \neq 0$.

• Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha\varepsilon_1 + \beta w_1(\varepsilon_1) = 0$. Comme $w_1^2 = 0$, alors on a :

$$w_1(\alpha\varepsilon_1 + \beta w_1(\varepsilon_1)) = \alpha w_1(\varepsilon_1) + \beta w_1^2(\varepsilon_1) = \alpha w_1(\varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

et donc $\beta = 0$. Ainsi la famille $(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))$ est une base de $E$.

---

ii. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $u(\varepsilon_1) = a\varepsilon_1 + b w_1(\varepsilon_1)$. Alors

$$u(w_1(\varepsilon_1)) = w_1(u(\varepsilon_1)) + \lambda w_1(\varepsilon_1) = a w_1(\varepsilon_1) + b w_1^2(\varepsilon_1) + \lambda w_1(\varepsilon_1) = (a + \lambda) w_1(\varepsilon_1).$$

Il en découle que la matrice de $u$ dans la base $(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))$ est triangulaire inférieure:

$$\mathcal{M}_{(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a + \lambda \end{pmatrix}.$$

---

iii. $Tr(u) = 2a + \lambda \Longrightarrow a = \dfrac{\mathrm{Tr}(u) - \lambda}{2}$. D'où

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{\frac{Tr(u) - \lambda}{2}, \frac{Tr(u) + \lambda}{2}\right\}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, $u$ est a spectre simple, donc diagonalisable.

---

(d) i. • Si $w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) = 0$ alors, en utilisant $\mathrm{Tr}(w_2) = 0$, on aura

$$\mathcal{M}_{(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))}(w_2) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = b\mathcal{M}_{(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))}(w_1).$$

D'où $w_2 = bw_1$ et $(w_1, w_2)$ est une famille liée. Ceci est absurde car $w_1$ et $w_2$ sont deux vecteurs propres de $\Theta_{u,-u}$ associés à des valeurs propres distinctes. Donc

$$w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) \neq 0.$$

• Avec le même raisonnement on obtient $w_1 \circ w_2(\varepsilon_1) \neq 0$.

---

ii. On sait que $\dim \ker(w_1) = 1$ et $\dim \ker(w_2) = 1$. D'où pour montrer que $E = \ker(w_1) \oplus \ker(w_2)$, il suffit de montrer que $\ker(w_1) \cap \ker(w_2) = \{0\}$. Comme $\ker(w_1) = \mathrm{Vect}\{w_1(\varepsilon_1)\}$ et $\ker(w_2) = \mathrm{Vect}\{w_2(\varepsilon_1)\}$, il suffit de montrer que $(w_1(\varepsilon_1), w_2(\varepsilon_1))$ est libre. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $aw_1(\varepsilon_1) + bw_2(\varepsilon_1) = 0$. En appliquant successivement $w_1$ et $w_2$ et en utilisant le fait que $w_1 \circ w_2(\varepsilon_1) \neq 0$ et $w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) \neq 0$, on aura $a = b = 0$.

---

iii. Des hypothèses $u \circ w_1 = w_1 \circ u + \lambda w_1$ et $u \circ w_2 = w_2 \circ u - \lambda w_2$, on déduit après composition avec $w_1$ (resp. $w_2$):

$$w_1 \circ u \circ w_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad w_2 \circ u \circ w_2 = 0.$$

D'où $u(w_1(\varepsilon_1)) \in \ker(w_1)$ et $u(w_2(\varepsilon_1)) \in \ker(w_2)$. Il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $u(w_1(\varepsilon_1)) = \alpha w_1(\varepsilon_1)$ et $u(w_2(\varepsilon_1)) = \beta w_2(\varepsilon_1)$. Il s'en suit que $(w_1(\varepsilon_1), w_2(\varepsilon_1))$ est une base de $E$ formée par des vecteurs propres de $u$.

---

## PARTIE II

### A- Etude de $\Phi_{A,B}$ dans une structure euclidienne

1. • La bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une conséquence immédiate de la bilinéarité du produit matriciel, des linéarités de la trace et de la transposition.

• Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle N, M \rangle = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(N^tM) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left[{}^t(N^tM)\right] = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M^tN) = \langle M, N \rangle,$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

• Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M^tM = \left( \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{jk} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. D'oú

$$\langle M, M \rangle = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M^tM) = \frac{1}{n} \sum_{i,k=1}^{n} m_{ik}^2 \geqslant 0.$$

En plus,

$$\langle M, M \rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall\, (i,k) \in \{1, \cdots, n\}^2, \quad m_{ik} = 0 \Longleftrightarrow M = 0.$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

2. Supposons que $A$ est symétrique. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_A(M), N\rangle &= \langle AM + MA, N\rangle = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\Big[(AM+MA)^t N\Big]\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\Big(AM^tN\Big) + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\Big(MA^tN\Big)\\ &= \frac{1}{n}Tr\Big[M({}^tNA + A^tN)\Big]\\ &= \frac{1}{n}Tr\Big[M^t(AN+NA)\Big]\\ &= \langle M, AN + NA\rangle\\ &= \langle M, \Phi_A^*(N)\rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$\Phi_A^*(N) = AN + NA = \Phi_A(N), \qquad \forall\, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

$\Phi_A$ est donc un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

---

3. • " $\Longrightarrow$ " Soient $\lambda$ une valeur propre de $C$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ tel que $CX = \lambda X$. On a :

$$0 < {}^tXCX = {}^tX\lambda X = \lambda^tXX = \lambda|X|^2.$$

On en déduit que $\lambda > 0$.

• " $\Longleftarrow$ " Supposons que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \subset \mathbb{R}_+^*$ et considérons une base orthonormée $(V_1, \cdots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de $C$. Alors pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, il existe une famille de réels non tous nuls $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $X = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i V_i$.

On a :

$$(CX|X) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i > 0.$$

D'où $C$ est définie positive.

---

4. $S$ étant symétrique définie positive, alors il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $S = PD^tP$.
La matrice

$$Q = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})^tP$$

est symétrique définie positive et vérifie $Q^2 = S$.

---

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, alors on a :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_S(M), M\rangle &= \langle SM + MS, M\rangle\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(SM^tM) + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(MS\,{}^tM)\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}({}^tMQ^2M) + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(MQ^2\,{}^tM)\\ &= \|{}^tMQ\|^2 + \|MQ\|^2 > 0.\end{aligned}$$

On en déduit que l'endomorphisme autoadjoint $\Phi_S$ est défini positif.

---

6. (a) Raisonnons par récurrence sur $k \geqslant 0$.
- Pour $k = 0$ c'est évident.
- De $\Phi_S M = \alpha M$ on déduit que $SM = M(\alpha I_n - S)$, d'où la propriété est vraie pour $k = 1$.
- Supposons que c'est vraie pour tout $\ell \in \{0, 1, \cdots, k\}$ et montrons-la pour $k + 1$.

$$\begin{aligned} S^{k+1}M &= S(S^k M) = SM(\alpha I_n - S)^k && \text{hypothèse de récurrence d'ordre } k \\ &= M(\alpha I_n - S)(\alpha I_n - S)^k && \text{hypothèse de récurrence d'ordre } 1 \\ &= M(\alpha I_n - S)^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

---

(b) Soit $R(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a:

$$\begin{aligned} R(S)M &= \sum_{k=0}^{m} a_k S^k M = \sum_{k=0}^{m} a_k M(\alpha I_n - S)^k \\ &= M \sum_{k=0}^{m} a_k (\alpha I_n - S)^k = MR(\alpha I_n - S). \end{aligned}$$

---

(c) i. • En prenant $R = P_S$ (le polynôme caractéristique de $S$) dans 6. (b) et en utilisant $P_S(S) = 0$ on obtient

$$MP_S(\alpha I_n - S) = 0. \tag{1}$$

• Si $P_S(\alpha I_n - S)$ était inversible, en multipliant (1) à droite par $(P_S(\alpha I_n - S))^{-1}$ on obtient $M = 0$ ceci contredit le fait que $M$ est un vecteur propre.

---

ii. $S$ est une matrice symétrique réelle, d'où son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, i.e.,

$$P_S(X) = (-1)^n (X - \mu_1)^{n_1} \cdots (X - \mu_m)^{n_m}.$$

Par suite

$$P_S(\alpha I_n - S) = (-1)^n [(\alpha - \mu_1) I_n - S]^{n_1} \cdots [(\alpha - \mu_m) I_n - S]^{n_m}.$$

Si pour tout $k \in \{1, \cdots, m\}$, $(\alpha - \mu_k) I_n - S$ est inversible alors $P_S(\alpha I_n - S)$ l'est également, ce qui n'est pas vraie d'après (c) i. Il existe alors $\beta \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$ tel que $(\alpha - \beta) I_n - S$ n'est pas inversible.

---

(d) Par (c) ii. on a $\sigma := \alpha - \beta \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$, d'où $\alpha = \sigma + \beta \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$. Ceci prouve que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi_S) \subset \mathbb{R}_+^*$. On conclut par 3.

---

7. Par 5. $\Phi_S$ est défini positif donc injectif. On a ${}^t(\Phi_S(M)) = \Phi_S({}^t M)$. D'où

$${}^t(\Phi_S(M)) = \Phi_S(M) \iff \Phi_S({}^t M) = \Phi_S(M) \iff M = {}^t M.$$

---

8. (a) • " $\Longrightarrow$ " Supposons que $C$ est définie positive, alors $C$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_1$ et $\lambda_2$ deux réels strictement positifs. Alors $\mathrm{Tr}(C) = \lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ et $\mathrm{d\acute{e}t}(C) = \lambda_1\lambda_2 = ac - b^2 > 0$. $ac > b^2$ et $a + c > 0$ donnent $a$ et $c$ de même signes positifs. Par conséquent $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
• " $\Longleftarrow$ " Supposons que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors $c > 0$ et donc $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $C$ est définie positive d'après 3.

---

(b) i. Soit $\lambda > 0$, alors on a :

$$\Phi_C(M_\lambda) = CM_\lambda + M_\lambda C = \begin{pmatrix} 2a\lambda & (1+\lambda)b \\ (1+\lambda)b & 2c \end{pmatrix}.$$

---

ii. Pour $b \neq 0$, on considère le trinôme en $\lambda$ suivant :

$$R(\lambda) = \mathrm{d\acute{e}t}(\Phi_C(M_\lambda)) = -b^2\lambda^2 + (4ac - 2b^2)\lambda - b^2.$$

Comme $\Delta' = 4ac(ac - b^2) > 0$ alors $R$ posséde deux racines réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ qui vérifient

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2ac + 2(ac - b^2)}{b^2} > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1\lambda_1 = 1 > 0.$$

Donc $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $R(\lambda)$ change de signe sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour $b > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\Phi_C(M_\lambda)$ n'est pas définie positive.

---

## B - Orthogonalité dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$

1. Par hypothèse on a :

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre aisément par récurrence que :

$$\text{Pour } p \in \{0, \cdots, n-1\}\text{ , } A^p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls sauf $c_{p+j,j} = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n - p$.
Pour $p \geqslant n$, on a $A^p = 0$.

---

(b) • On montre aisément par récurrence que, pour tout $0 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$B^p = A^p + {}^tA^{n-p} = (d_{l,m})_{1 \leqslant l,m \leqslant n}$$

avec $d_{p+j,j} = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant n-p$, $d_{i,n-p+i} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et 0 pour les autres coefficients. En particulier $B^{n-1} = A^{n-1} + {}^tA = {}^tB$.

• On déduit que $B^n = B^tB = I_n$. (Cette dernière égalité s'obtient par un calcule directe).

Remarquons que, pour $p \geqslant n$, on a $B^p = B^r$ où $r$ est le reste de la division euclidienne de $p$ par $n$.

---

2. Par le calcul ci-dessus, on a $B^tB = {}^tBB = I_n$. Donc $B$ est une matrice orthogonale et il vient de suite que, pour tout entier naturel $p$, $B^p$ est orthogonale.

---

3. (a) • Il découle de 1. (a) que $\mathcal{E}_A = \text{Vect}\{I_n, A, \cdots, A^{n-1}\}$ et que pour tout $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}_A$. On en déduit que $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{E}_A$ et que $\dim(\mathcal{E}_A) = n$.

• Il résulte de 1. (b) que $\mathcal{E}_B = \text{Vect}(I_n, B, \cdots, B^{n-1})$ et que pour tout $(x_0, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$,

$$x_0 I_n + x_1 B + \cdots + x_{n-1}B^{n-1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{n-1} & \cdots & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & x_4 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(I_n, B, \cdots, B^{n-1})$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}_B$. Ainsi $(I_n, B, \cdots, B^{n-1})$ est une base de $\mathcal{E}_B$ et $\dim(\mathcal{E}_B) = n$.

---

(b) Clairement

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = \sum_{j=0}^{n-1} x_j B^j \iff \begin{cases} a_0 = x_0 \\ \forall j \in \{1, \cdots, n-1\};\ a_j = x_j = 0. \end{cases}$$

D'où $\mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B = \text{Vect}\{I_n\}$.

---

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p$ est une matrice triangulaire inférieure et ne contient que des zéros sur son diagonale. Par conséquent :

- $\forall p \in \mathbb{N}^*, \text{dét}(A^p) = 0$ donc $A^p$ n'est pas inversible.

- $\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p$ admet 0 pour unique valeur propre de multiplicité $n$ donc $A^p$ est diagonalisable si et seulement si $p \geqslant n$.
  En effet, pour $p \geqslant n, A^p = 0$ donc diagonalisable. Pour $p \in \{0, \cdots, n-1\}$, si $A^p$ était diagonalisable, elle serait d'aprés ce qui précède semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0) = 0$, c'est-à-dire égale à 0, ce qui est faux.

---

5. • On sait, d'après 1., que pour $p \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$A^p = \sum_{j=1}^{n-p} E_{p+j,j} = \sum_{i=p+1}^{n} E_{i,i-p}.$$

Donc, pour $p, q \in \{0, \cdots, n-1\}^2$, en utilisant l'identité $E_{i,j}E_{l,m} = \delta_{jl}E_{i,m}$, on obtient :

$$A^p\,{}^t(A^q) = \Big(\sum_{i=p+1}^{n} E_{i,i-p}\Big)\Big(\sum_{j=q+1}^{n} E_{j-q,j}\Big) = \sum_{i=p+1}^{n}\sum_{j=q+1}^{n} \delta_{i-p,j-q}E_{i,j}.$$

• Supposons que $p \neq q$, alors pour $i = j$ on a $\delta_{i-p,j-q} = 0$. Donc

$$A^p\,{}^t(A^q) \in \text{Vect}\{E_{i,j}, 1 \leqslant i, j \leqslant n \,\text{et}\, i \neq j\} \subset \ker(Tr).$$

D'où pour $p \neq q$ on a:

$$\langle A^p, A^q\rangle = \frac{1}{n}\text{Tr}(A^p\,{}^t(A^q)) = 0.$$

• Supposons que $p = q$, alors $A^p\,{}^t(A^q) = \sum_{i=p+1}^{n} E_{i,i}$, donc

$$\langle A^p, A^q\rangle = \frac{1}{n}\text{Tr}\Big(\sum_{i=p+1}^{n} E_{i,i}\Big) = \frac{n-p}{n}.$$

On en déduit que pour $p, q \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$\langle A^p, A^q\rangle = \frac{n-p}{n}\,\delta_{pq}$$

---

6. D'après 3. et 5., il est clair que $\left(\sqrt{\frac{n}{n-p}}\,A^p\right)_{0\leqslant p\leqslant n-1}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}_A$.

---

7. D'après 2., pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B^p$ est une matrice orthogonale. D'où

$$\forall\,(p,q) \in \{1, \cdots, n-1\}^2, \quad B^p\,{}^t(B^q) = B^{p-q}.$$

Or il résulte de 1. et 5. que

$$\begin{cases} B^k \in \text{Vect}\{E_{i,j}, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\} & \text{pour } \; k \in \mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z} \\ B^k = I_n & \text{pour } \; k \in n\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Il vient

$$\langle B^p, B^q\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } \; p \neq q \\ 1 \text{ si } \; p = q. \end{cases}$$

Ainsi $(B^p)_{0\leqslant p\leqslant n-1}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}_B$.

---

8. Soient $p, q \in \{0, \cdots, n-1\}$. En utilisant 1., on obtient :

$$\langle A^p, B^q \rangle = \langle A^p, A^q + {}^t(A^{n-q}) \rangle = \langle A^p, A^q \rangle + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A^p A^{n-q}).$$

Or $n+p-q \geqslant 1$ donc $\mathrm{Tr}(A^{n+p-q}) = 0$. On en déduit $\langle A^p, B^q \rangle = \langle A^p, A^q \rangle$.

---

9. • Pour tout $q \in \{0, \cdots, n-1\}$, d'après 8., on a :

$$\langle A^q, B^p - A^p \rangle = \langle A^q, B^p \rangle - \langle A^q, A^p \rangle = 0.$$

Donc par linéarité $B^p - A^p \in \Big(\mathrm{Vect}\{I_n, A, \cdots, A^{n-1}\}\Big)^{\perp} = \mathcal{E}_A^{\perp}$.

• Soit $C \in \mathcal{E}_A$. Remarquons que pour tout $q \in \{0, \cdots, n-1\}$, on a :

$$\langle A^q, B^p - C \rangle = \langle A^q, B^p \rangle - \langle A^q, C \rangle = \langle A^q, A^p \rangle - \langle A^q, C \rangle.$$

$\left(\sqrt{\dfrac{n}{n-q}}A^q\right)_{0 \leqslant q \leqslant n-1}$ étant une base orthonormée de $\mathcal{E}_A$, d'où

$$C = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n}{n-q} \langle A^q, C \rangle A^q.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} B^p - C \in \mathcal{E}_A^{\perp} &\iff \langle A^q, B^p - C \rangle = 0, \quad \forall q \in \{0, \cdots, n-1\} \\ &\iff \langle A^q, C \rangle = \langle A^q, A^p \rangle, \quad \forall q \in \{0, \cdots, n-1\} \end{aligned}$$

D'où

$$C = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n}{n-q} \langle A^q, C \rangle A^q = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n}{n-q} \langle A^q, A^p \rangle A^q = A^p.$$

On en déduit que $A^p$ est l'unique élément $C$ de $\mathcal{E}_A$ tel que $B^p - C \in \mathcal{E}_A^{\perp}$.

---

© Fin de la correction.