Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques II

PARTIE I

1. (a) Trivial.

   (b) i. p est une projection orthogonale sur $Im\,A$, pour $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $p(b) \in Im\,A$. D'où l'existence d'un élément $\xi_0 \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\xi_0 = p(b)$.

   ii. D'après Pythagore on a, pour tout $\xi \in M_{m,1}(\mathbb{R})$:

$$\|A\xi - b\|_n^2 = \|A\xi - A\xi_0 + A\xi_0 - b\|_n^2 = \|A\xi - A\xi_0\|_n^2 + \|A\xi_0 - b\|_n^2,$$

   car $(A\xi - A\xi_0) \in ImA$ et $A\xi_0 - b = p(b) - b \in (ImA)^\perp$. D'où l'inégalité :

$$\|A\xi - b\|_n^2 \geq \|A\xi_0 - b\|_n^2, \quad \forall \xi \in M_{m,1}(\mathbb{R}).$$

   iii. La fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante et le minorant est atteint en $\xi = \xi_0$. Il en résulte que :

$$\min_{\xi \in M_{m,1}(\mathbb{R})} \|A\xi - b\|_n = \|A\xi_0 - b\|_n.$$

---

2. Soient ξ_1 et ξ_0 deux pseudo-solutions. On a :

$$\|A\xi_1 - b\|_n^2 = \|A\xi_1 - A\xi_0 + A\xi_0 - b\|_n^2 = \|A\xi_1 - A\xi_0\|_n^2 + \|A\xi_0 - b\|_n^2,$$

car $(A\xi_1 - A\xi_0) \in Im\,A$ et $A\xi_0 - b \in (Im\,A)^\perp$. D'après la question 1, $\|A\xi_1 - b\|_n^2 = \|A\xi_0 - b\|_n^2$, on obtient alors : $\|A\xi_1 - A\xi_0\|_n^2 = 0$ ce qui entraîne $(\xi_1 - \xi_0) \in Ker\,A = \{0\}$, et donc $\xi_1 = \xi_0$.

---

3. (C.N.)

Si ξ_0 est une pseudo-solution de (S1) alors $A\xi_0 = p(b)$, et donc $(A\xi_0 - b) = p(b) - b \in (Im\,A)^\perp$. C'est à dire : $< A\xi, A\xi_0 - b >_n = 0$.

(C.S.)

Inversement, si pour tout $\xi \in M_{m,1}(\mathbb{R})$: $< A\xi, A\xi_0 - b >_n = 0$, alors on a $(A\xi_0 - b) \in (Im\,A)^\perp$ et comme $A\xi_0 \in Im\,A$ on obtient $A\xi_0 = p(b)$. C'est à dire que ξ_0 est une pseudo-solution du système (S1).

4.

$$\begin{aligned}
&\xi_0 \text{ est une pseudo-solution du système (S1)} \\
\Leftrightarrow\ & < A\xi, A\xi_0 - b >_n = 0 \quad \forall \xi \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow\ & {}^t(A\xi)(A\xi_0 - b) = 0 \quad \forall \xi \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow\ & {}^t\xi\,{}^tA(A\xi_0 - b) = 0 \quad \forall \xi \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow\ & {}^tA(A\xi_0 - b) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & {}^tA\,A\xi_0 = {}^tA\,b.
\end{aligned}$$

PARTIE II

- A - Minimisation dans $\mathbb{R}_m[X]$

1. $P(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m$.

2. L'écriture précédente de $P(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$, donne l'équation matricielle suivante :
$$\begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_m) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = A\xi$$

3. La sous matrice carrée $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq m+1}$ est une matrice de type Vondermonde associée à une famille de $(x_i)_i$ de valeurs deux à deux distinctes, et donc inversible. Par suite, on a
$$rg(A) = m + 1.$$
Remarque : On pourra démontrer facilement que si $V = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq m+1}$ alors elle est inversible, en effet : On suppose que $VY = 0$, et on associe au vecteur Y de composantes $(y_k)_{0 \leq k \leq m}$ le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{m} y_k X^k$. Ce polynôme vérifie $Q(x_i) = 0$, pour tout $0 \leq i \leq m$, et donc Q est identiquement nul puisqu'il est de degré $\leq m$. C'est à dire $Y = 0$.

4. Si on pose $b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, on obtient alors : $\|A\xi - b\|_{n+1}^2 = \sum_{i=0}^{n} (A\xi - b)_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$.

5. A cause de la bijection $\phi_m : P \in \mathbb{R}_m[X] \mapsto \xi \in M_{m+1,1}(\mathbb{R})$ et d'après la question précédente on obtient le résultat.

6. Le théorème de rang appliqué à la matrice A, donne :
$$m + 1 = dim\{Ker\, A\} + rg(A) = dim\{Ker\, A\} + m + 1$$
Il en résulte que $Ker\, A = \{0\}$, d'après la partie I, il existe une pseudo-solution unique ξ_0. Soit $P_m = \phi_m^{-1}(\xi_0)$, selon les questions 4 et 5, on aura
$$\min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \Psi_m(P) = \|A\xi_0 - b\|_{n+1}^2 = \Psi_m(P_m).$$

- B - Calculs de P_m et δ_m

1. $< .,. >$ est une forme bilinéaire symétrique.

   Cette forme est définie-positive :

$$< P, P >= \sum_{i=0}^{n} (P(x_i))^2 \geq 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$$

   et $\quad < P, P >= 0 \quad \Rightarrow \quad P(x_i) = 0, \quad \forall i = 0, ..., n \quad \Rightarrow \quad P = 0,$ puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

   En conclusion, $< .,. >$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_n[X]$, et donc elle munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'une structure euclidienne.

---

2. (a) degré$(L_i) = n, \quad \forall i = 0, ..., n$.

   (b) Pour $i = j$, $L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (\frac{x_i - x_k}{x_i - x_k}) = 1$.

   Pour $i \neq j$, $L_i(x_j) = \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \notin \{i,j\}}} (\frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}) = 0$.

   (c) Pour tout $0 \leq i, j \leq n$, on a : $< L_i, L_j >= \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k) L_j(x_k) = \delta_{ij}$. La famille $(L_0, ..., L_n)$ est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, car $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

   (d) La décomposition de P dans la base $(L_0, ..., L_n)$ donne :

$$P = \sum_{i=0}^{n} < P, L_i > L_i$$

   Avec

$$< P, L_i >= \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_i(x_k) = P(x_i),$$

   d'après $L_i(x_k) = \delta_{ik}$.

---

3. (a) $Y = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$ (il s'agit du polynôme d'interpolation de Lagrange).

   Pour $j \in \{0, 1, ..., n\}$, $Y(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = y_j$.

   (b) Comme la base $(L_0, ..., L_n)$ est orthonormale, on obtient d'après la question précédente

$$\|Y - P\|^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2, \quad \forall P \in \mathbb{R}_m[X],$$

   Et par conséquent $\min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \Psi_m(P) = \min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \|Y - P\|^2$.

(c) Constatons que $\mathbb{R}_m[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ ($m \leq n$). On a

$$\min_{P\in\mathbb{R}_m[X]} \|Y - P\|^2 = \min_{P\in\mathbb{R}_m[X]} \Psi_m(P) = \Psi_m(P_m) = \|P_m - Y\|^2,$$

d'où P_m est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_m[X]$.

---

4. (a) $Q_1 = X - \dfrac{< X, Q_0 >}{\|Q_0\|^2} Q_0$, avec

$$< X, Q_0 >= \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \|Q_0\|^2 = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$$

$\Rightarrow \; Q_1 = X - \dfrac{n}{2}.$

(b) Récurrence sur k :
degré$(Q_0) = 0$. Supposons que degré$(Q_i) = i, \quad \forall i = 0, ..., (k-1)$.
Dans ce cas, le polynôme $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{< X^k, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et donc degré$(Q_k) = k$.

(c) Montrons par récurrence sur $k \in \{1, ..., n\}$ que la famille $\{Q_0, ..., Q_k\}$ est orthogonale:

$$< Q_0, Q_1 >=< 1, X - \frac{n}{2} >= \sum_{i=0}^{n} (i - \frac{n}{2}) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 0.$$

Supposons que $\{Q_0, ..., Q_{k-1}\}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $k' \in \{0, ..., k-1\}$, on a

$$\begin{aligned}
< Q_k, Q_{k'} > &=< X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{< X^k, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i, Q_{k'} > \\
&=< X^k, Q_{k'} > - < \sum_{i=0}^{k-1} \frac{< X^k, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i, Q_{k'} > \\
&=< X^k, Q_{k'} > - < X^k, Q_{k'} > \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(d) Il suffit de constater que $\{Q_0, Q_1, ..., Q_n\}$ est une famille orthogonale de $(n+1)$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension n+1.

(e) i. Pour $j \in \{0, ..., k-1\}$:

$$\begin{aligned}
< H_k, X^j > &= \sum_{i=0}^{n} H_k(x_i) x_i^j = \sum_{i=0}^{n} H_k(i) i^j = \sum_{i=0}^{n} Q_k(n-i) i^j \\
&= \sum_{p=0}^{n} Q_k(p)(n-p)^j =< Q_k, (n-X)^j > \\
&= 0
\end{aligned}$$

En effet, $(n-X)^j \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $Q_k \in (Vect\{Q_0, ..., Q_{k-1}\})^{\perp} = (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.

ii. La famille $(X^j)_{0\leq j\leq (k-1)}$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, d'après la question précédente on obtient $H_K \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.

iii. On a $H_k \in \mathbb{R}_k[X] \Rightarrow H_k = \sum_{i=0}^{k} a_i Q_i$

de même $H_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp} \Rightarrow a_i =< H_k, Q_i >= 0,\ \forall i = 0, ..., k-1 \Rightarrow H_k = a_k Q_k$. Comme Q_k est unitaire et le coefficient dominant de H_k est $(-1)^k$ alors $H_k = (-1)^k Q_k$.

(f) i. On a démontrer que P_m est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_m[X]$. D'autre part, $(Q_i)_{0\leq i\leq m}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$. En exprimant que $(Y - P_m)$ est orthogonal au sous espace vectoriel $\mathbb{R}_m[X]$, on obtient :

$$< Y - P_m, Q_i >= 0, \quad \forall i = 0, ..., m,$$

et donc

$$< Y, Q_i >=< P_m, Q_i >, \quad \forall i = 0, ..., m.$$

ii. La famille $(\frac{Q_i}{\|Q_i\|})_{0\leq i\leq m}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_m[X]$. Dans cette base on peut écrire

$$P_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{< P_m, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i = \sum_{i=0}^{m} \frac{< Y, Q_i >}{\|Q_i\|^2} Q_i.$$

iii. Pour tout $m \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$P_m = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{< Q_i, Y >}{\|Q_i\|^2} Q_i + \frac{< Q_m, Y >}{\|Q_m\|^2} Q_m = P_{m-1} + \frac{< Q_m, Y >}{\|Q_m\|^2} Q_m.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \delta_{m-1} &= \|Y - P_{m-1}\|^2 = \|Y - P_m + \frac{< Q_m, Y >}{\|Q_m\|^2} Q_m\|^2 \\ &= \|Y - P_m\|^2 + \frac{(< Q_m, Y >)^2}{\|Q_m\|^4} \|Q_m\|^2, \text{ car } (Y - P_m) \text{ est orthogonal à } Q_m. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\delta_m = \delta_{m-1} - \frac{(< Q_m, Y >)^2}{\|Q_m\|^2}.$$

iv. P_n est le projeté orthogonal de $Y \in \mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, d'où $P_n = Y$ et par suite $\delta_n = 0$.

- C - Exemple

1. Il suffit de considérer $P_0 = a_0$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'après ce qui précède et en particulier le système (S2) : ${}^tA\,Aa_0 = {}^tAb$, on trouve $4a_0 = 6$ et donc $P_0 = \frac{3}{2}$.

   Ceci entraine, $\delta_0 = \Psi_0(P_0) = 1$.

---

2. D'après le système de récurrence (S3), on a :

$$P_1 = P_0 + \frac{< Q_1, Y >}{\|Q_1\|^2} Q_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 = \delta_0 + \frac{(< Q_1, Y >)^2}{\|Q_1\|^2}$$

D'après un calcul précédent on a $Q_1 = X - \frac{3}{2}$. Comme $< Q_1, Y >= 1$ et $\|Q_1\|^2 = 5$, on obtient alors :

$$P_1 = \frac{1}{5}(X + 6) \quad \text{et} \quad \delta_1 = \frac{4}{5}.$$

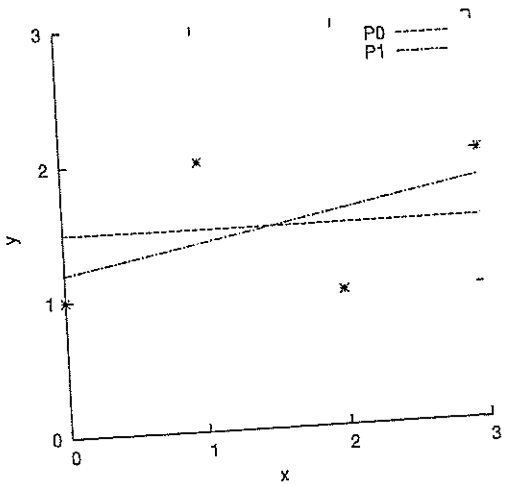
3. 

Figure 1: Approximations polynômiales.