

I

I.A.1	Il faut $l \gg a$ pour pouvoir négliger les effets de bord.	0,5	
I.A.2	$\text{div } \vec{B} = 0$; $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ (forme locale). $\oint_{\text{spine}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ (conservation de flux de \vec{B}) et $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (Théorème d'Ampère). (C)	0,5	0,1 0,1
I.A.3	Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. P.o. sym $\Rightarrow \vec{B}$ (vecteur axial) $= \vec{B}_N = B(r, \theta) \vec{u}_z$. Le translation suivant z et la rotation d'un angle θ laissent le système invariant $\Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{u}_z$. (Pau + le plan : $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ P.d'antisym.)	0,5	
I.A.4	$r < a$: $\int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 h_1 - B_0 h_1 = 0 \Rightarrow \boxed{B = B_0}$ (B uniforme) $r > a$: $\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 h_2 - B_0 h_1 = \mu_0 n l h_2 \Rightarrow \boxed{B = B_0 - \mu_0 n l}$	1	
I.A.5	A l'infini ($r \rightarrow \infty$) $\Rightarrow B(r) = 0$ - d'où : $\vec{B}_0 = \mu_0 n i$	1	
I.A.6	$\phi = n l \iint_{\text{spine}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \mu_0 \pi n^2 l a^2 i = L i \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \pi n^2 l a^2}$	1,1	0,25
I.A.7	$dI = \int \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int \vec{j} \cdot d\vec{s}$ d'où : $\vec{j} = j_s \vec{u}_\theta = (n i) \vec{u}_\theta$ et $\vec{B}_0 = \mu_0 j_s \vec{u}_z$ $\vec{B}_2(\text{ext}) - \vec{B}_1(\text{int}) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ ($\vec{n}_{12} = \vec{u}_r$) $0 - \vec{B}_0 = \mu_0 n i \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\mu_0 n i \vec{u}_z$	1,5	0,5
I.B.1	Le courant variable $i(t)$ crée dans le conducteur un champ magnétique variable dans le temps ($\vec{B}_0(t)$). Ce champ $\vec{B}_0(t)$ induit un champ électromoteur \vec{E}_i qui va dissiper de la chaleur par effet Joule ($dP = \vec{j} \cdot \vec{E}_i = \sigma E_i^2$) et chauffer le conducteur.	0,5	
I.B.2	$L \gg R$ (cylindre infini) : * translation suivant z et rotation d'un angle θ laissent le cylindre invariant $\Rightarrow \vec{E}(r)$. * Tout plan contenant l'axe Oz est d'antisymétrie pour la distribution de courant $\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_N = E_\theta(t) \vec{u}_\theta$. * $M \in$ l'axe Oz ; $\pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $\pi_2(M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ plans l'antisym. $\Rightarrow \vec{E}_1 \perp \pi_1$ et $\vec{E}_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{E}_1(r=0, t) = \vec{0}$	1	0,5
I.B.3	$\text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_0(t)}{\partial t}$, soit : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta(t)) \vec{u}_z = B_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_z$ $\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin \omega t \cdot \vec{u}_\theta$	1	
I.B.4	$\vec{A}_s(M, t) = \frac{1}{2} (B_0 \omega \sin \omega t) \vec{u}_z \wedge (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z) = \frac{1}{2} B_0 r \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta$	1,5	0,1

$$E_1 = -\frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \omega r B_0 \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

$$\vec{j}_1 = \delta \vec{E}_1$$

I.B.5

La puissance $dP(t)$ dissipée par effet Joule dans le volume $d\tau = 2\pi r dr dz$:

$$dP = \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1 d\tau = \frac{1}{4} \delta r^2 \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \cdot d\tau$$

$$P(t) = \frac{\pi}{8} \delta \omega^2 B_0^2 L R^4 \sin^2 \omega t \Rightarrow \langle P \rangle_t = \frac{\pi}{16} \delta \omega^2 B_0^2 L R^4$$

I.B.6

$\langle P \rangle_t$ est fonction de $\omega^2 \Rightarrow$ il faut utiliser une fréquence élevée

I.B.7.

a)

$\text{rot}(\vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_1$
 cylindre infini : Le plan $(H, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ P.Sym $\Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{B}_N = B_1(r) \vec{u}_\theta$
 • Invariance par translation et rotation

I.B.7.

b)

$$-\frac{\partial}{\partial r} (B_{1\theta}) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \delta B_0 \omega r}{2} \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

$$\text{soit : } \vec{B}_1(r, t) = \frac{\mu_0 \delta \omega}{4} B_0 (R^2 - r^2) \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

I.B.7.

c)

$$\text{Le rapport : } \frac{\|\vec{B}_1(r=R, t)\|}{\|\vec{B}_0\|} = \frac{\mu_0 \delta \omega}{4} R^2 < \frac{1}{10} \text{ soit : } R < \sqrt{\frac{2}{5\mu_0 \delta \omega}}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{5\pi \mu_0 \delta R^2} \text{ soit : } f < f_M = 11 \text{ Hz}$$

• Elle est insuffisante au 1^{er} ordre.

• On peut appliquer la méthode des ajustements successifs en s'arrêtant à l'ordre n le plus élevé possible :

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\vec{B}_n) = \vec{j}_n \quad \text{et} \quad \text{rot}\left(\frac{\vec{B}_n}{\delta}\right) + \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = 0$$

Il faut ainsi sommer une infinité de termes de champ pour reconstituer le champ total :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \dots + \vec{B}_{n-1}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \dots$$

I.C.1

$$\epsilon_0 \omega \ll \delta \Rightarrow f \ll \frac{\delta}{2\pi \epsilon_0} \text{ soit } f \ll 10^{18} \text{ Hz}$$

cette approximation reste toujours valable (ARQS).

I.C.2

$$\text{div} \vec{E} = 0 ; \text{div} \vec{B} = 0 ; \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \delta \vec{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \cdot \vec{E} \Rightarrow \Delta(\vec{E}) - \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Nous obtenons exactement la même équation pour \vec{B} et \vec{j} .

I.C.3 La relation (5) entraîne que : $\vec{\Delta}(\vec{E}) = -\text{rot}(\text{rot}\vec{E})$; avec $\vec{E} = \underline{E}(r)e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$ (3)

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = -\text{rot} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r E_\theta(r)) \vec{u}_\theta \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] \vec{u}_\theta$$

$$= \left[\frac{d^2 E_\theta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_\theta(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} E_\theta(r) \right] \vec{u}_\theta = \left(\left[\Delta - \frac{1}{r^2} \right] \underline{E}(r) e^{i\omega t} \right) \vec{u}_\theta$$

avec : $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$

I.C.4

$$\frac{d^2 \underline{E}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{E}(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \underline{E}(r) - \frac{2i}{\delta^2} \underline{E}(r) = 0$$

$$\underline{E}(r) = E_0 e^{-\left[\frac{1+i}{\delta}\right](R-r)} \quad \text{avec } r \gg \delta$$

$$\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 + \frac{1+i}{r\delta} - \frac{1}{r^2} = \frac{2i}{\delta^2} \Rightarrow \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 = \frac{2i}{\delta^2}$$

pour : $r^2 \gg r\delta \gg \delta^2$ (la solution convient) .

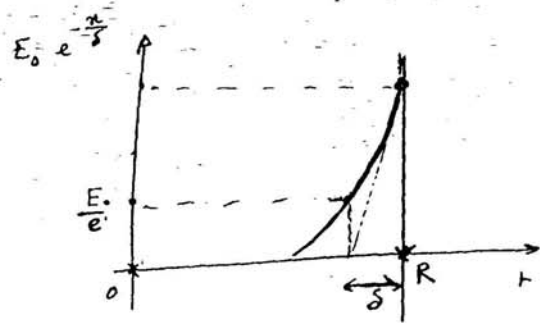
I.C.5 La quantité δ homogène à une longueur est appelée "épaisseur de peau" car elle caractérise l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la région dans laquelle circule un courant électrique. On peut aussi dire que elle caractérise la profondeur à laquelle pénètre le champ magnétique créé par la bobine extérieure.

$f = 50 \text{ Hz } (\delta = 3 \text{ cm}) ; f = 1 \text{ kHz } (\delta = 7 \text{ mm}) ; f = 100 \text{ kHz } (\delta = 0,7 \text{ mm})$

I.C.6 $x = R - r \ (r \approx R) \Rightarrow \vec{E}(x,t) = E_0 e^{-\frac{(1+i)x}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$

$$\text{Re}(\vec{E}) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \vec{u}_\theta$$

Il s'agit d'une onde polarisée selon \vec{u}_θ qui se propage vers $x > 0$ (à partir de $x = 0$) pendant que l'amplitude décroît exponentiellement. δ donne la profondeur que peut atteindre l'onde qui traverse dans le conducteur.



I.C.7	En augmentant f , δ devient petit \Rightarrow on limite la zone du chauffage. Pour $f=50\text{Hz}$: ($\delta=R$) on chauffe pratiquement le cylindre uniformément: $\left(\frac{2}{\rho_0 \delta \omega^2 n} = R^2\right)$.	(4) 0,5
-------	--	------------

II 8/40

II.1	$\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad} T$; $[\lambda] = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$	0,5 0,25 0,25
------	---	---------------------

II.2	$\phi_{th} = 2\pi h r j_{th}$; $\phi_{th}(r)$ entrant et $\phi_{th}(r+dr)$ sortant : $d\phi_{th} = 2\pi h [j_{th}(r) \cdot r - j_{th}(r+dr) \cdot (r+dr)]$ $= -2\pi h \frac{\partial}{\partial r} (r j_{th}) dr$	0,5 1,5 1
------	---	-----------------

II.3	$\langle dP \rangle_t = \frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{8} r^2 2\pi r h dr = \frac{\pi h \sigma \omega^2 B_0^2}{4} r^3 dr$	1
------	---	---

II.4	<p>D'après le 1^{er} principe: $dU = \rho 2\pi r h dr c dT = d\phi_{th} dt + \langle dP \rangle_t \cdot dt$ En régime permanent:</p> $0 = -2\pi h \frac{d}{dr} (r j_{th}) dr + \frac{\pi h \sigma \omega^2 B_0^2}{4} r^3 dr$ <p>soit: $\frac{d}{dr} (r j_{th}) = -\frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{8} r^3$</p>	2
------	---	---

II.5	$r j_{th} = -\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{32} r^4 + A$ $\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{32 \lambda} r^3 - \frac{A}{\lambda r}$ $T(r) = -\frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{128 \lambda} r^4 - \frac{A}{\lambda r} + B$ $T(r=0) = T_1 \Rightarrow A=0$ et $B = T_1$ $T(r) = -\frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{128 \lambda} r^4 + T_1$ avec: $T(r=R) = T_2$ soit: $T(r) = T_2 + \frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{128 \lambda} (R^4 - r^4)$	2
------	---	---

II.6		0,5
------	--	-----

III

8/40

III.1

* a_0 correspond à la valeur moyenne du signal $u(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt = 0$$

* A partir de la figure 3, $u(t)$ est une fonction impaire donc

$$\sum_n b_n \cos n\omega t = 0 \quad \text{d'où : } b_n = 0$$

(0,7)

1,5

(1)

III.2

$$* a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2E}{T} \left[\int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt - \int_{T/2}^T \sin(n\omega t) dt \right]$$

$$= \frac{4E}{n\omega T} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$* n=1: a_1 = \frac{4E}{\pi} \quad ; \quad n=2: a_2 = 0 \quad ; \quad n=3: a_3 = \frac{4E}{3\pi}$$

1,25

2

(0,25) x 3

III.3

$$\underline{u}_n = (R + i(Ln\omega) - \frac{1}{Cn\omega}) \underline{i}_n = \underline{Z}_n \cdot \underline{i}_n$$

$$|Z_1| = Z_1 = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \quad ; \quad Z_3 = \sqrt{R^2 + (L3\omega - \frac{1}{C3\omega})^2}$$

$$I_1 = \frac{U_{1eff}}{Z_1} = \frac{U_1/\sqrt{2}}{Z_1} = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{Z_1} = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi [R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2]^{1/2}}$$

$$I_3 = \frac{U_{3eff}}{Z_3} = \frac{U_3/\sqrt{2}}{Z_3} = \frac{4E}{3\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{Z_3} = \frac{2\sqrt{2}E}{3\pi [R^2 + (L3\omega - \frac{1}{C3\omega})^2]^{1/2}}$$

A.N: $I_1 = 576 \text{ A} \quad (Z_1 = 947 \Omega) \quad ; \quad I_3 = 48 \text{ A} \quad (Z_3 = 1,85 \Omega)$

(0,5)

3,5

(1)

(1)

(1)

III.4

Z_n augmente si n croît, les amplitudes des composantes de $i(t)$ de rang supérieur à 4 sont négligeables: $i(t)$ peut être considérée comme sinusoidale.

1