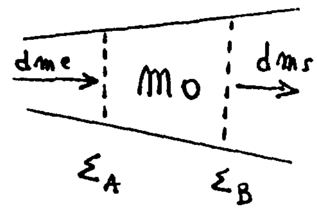
Corrigé de l'épreuve de physique

Exercice

1- On considère une masse de fluide comprise entre les deux sections fixes Σ_1 et Σ_2.



$dm_e = D_{mA}\,dt$: masse qui rentre pendant dt (0,5)

$dm_s = D_{mB}\,dt$: masse qui sort pendant dt

En régime permanent, $m_0 = c^{te} \Rightarrow dm_e = dm_s \Rightarrow D_{mA} = D_{mB} = D_m$

2.a- $E_m(t) = E_{m,t}(A_1A_2) = E_{m,t}(B_1A_2) + dE_1$

$E_m(t+dt) = E_{m,t+dt}(B_1B_2) = E_{m,t+dt}(B_1A_2) + dE_2$

En régime permanent $E_{m,t}(B_1A_2) = E_{m,t+dt}(B_1A_2) = E_0 = c^{te}$ (0,5)

$\Longrightarrow E_m(t+dt) - E_m(t) = dE_2 - dE_1$.

2.b- $dE_2 = D_m\,dt\left(u_2 + \frac{1}{2}C_2^2\right)$ (0,5)

$dE_1 = D_m\,dt\left(u_1 + \frac{1}{2}C_1^2\right)$

2.c - $\delta W_{pression} = \delta W_{amont} + \delta W_{aval}$

$\delta W_{amont} = -P_1(V_f - V_i) = -P_1(-dm\,v_1) = D_m P_1 v_1\,dt$

$\delta W_{aval} = -P_2(V_f - V_i) = -P_2(dm\,v_2) = -D_m P_2 v_2\,dt$ (0,5)

$$\mathcal{P}_{pression} = \frac{\delta W}{dt} = D_m\left(P_1 v_1 - P_2 v_2\right)$$

2.d - $dE_m = E_m(t+dt) - E_m(t) = dE_2 - dE_1 = \delta Q + \delta W_u + \delta W_{pression}$

$D_m\left[\left(u_2 + \frac{1}{2}C_2^2\right) - \left(u_1 + \frac{1}{2}C_1^2\right)\right] = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u + D_m\left(P_1v_1 - P_2v_2\right)$ (0,5)

avec $h_2 = u_2 + P_2v_2$ et $h_1 = u_1 + P_1v_1$, il vient :

$$D_m\left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\left(C_2^2 - C_1^2\right)\right] = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$$

3 - $\mathcal{P}_u = D_m\,c_p\,(T_2 - T_1)$; $c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)M}$; $T_2 = T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$c_p = 1001{,}7\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; $T_2 = 631{,}38\ \mathrm{K}$ (1)

$\mathcal{P}_u = -3{,}69\ 10^4\ \mathrm{W}$. Le fluide fournit donc à la machine la puissance $\mathcal{P} = 3{,}69\ 10^4\ \mathrm{W}$.

Problème 1

1/ MF $\Rightarrow \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \left(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$ (1)

MA $\Rightarrow \left(\overrightarrow{rot}\,\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \vec{E}$ (2) — 0,75

(1) - (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\overrightarrow{rot}\,\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = -\vec{J}\cdot\vec{E} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}\right) = div\left(\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)$

On obtient, par identification, $u_{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et $\vec{R} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

2/ En intégrant cette formule sur le volume fixe (V) et en utilisant la relation de Green-Ostrogradsky, on obtient :

$$-\frac{d}{dt}\iiint_{(V)}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) d\tau = \iiint_{(V)} \vec{J}\cdot\vec{E}\, d\tau + \oiint_{(S)} \vec{R}\cdot\vec{dS}$$

En régime permanent, on trouve : $\iiint_{(V)} \vec{J}\cdot\vec{E}\, d\tau + \oiint_{(S)} \vec{R}\cdot\vec{dS} = 0$ — 0,75

$\oiint \vec{R}\cdot\vec{dS}$: puissance qui sort à travers S ($\vec{n}$ vers l'extérieur)

$\iiint_{(V)} \vec{J}\cdot\vec{E}\, d\tau$: puissance cédée par $(\vec{E},\vec{B})$ à la matière, dissipée sous forme de chaleur (effet Joule).

3) $\vec{J} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \left(\dfrac{J_0}{\gamma}\right)\vec{e_z}$ — 0,25

4) La distribution de courant est invariante par translation le long de Oz et par rotation autour de cet axe $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$.

Le plan contenant M et l'axe (Oz) $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est de symétrie pour la distribution de courant ; il en résulte que $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan $\vec{B} = B\,\vec{e_\theta}$. $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e_\theta}$ — 0,5

5) L'application du théorème d'Ampère, à un contour circulaire de rayon r, centré sur l'axe, donne : — 0,75

pour $r \leq a$ $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 J_0}{2} r\,\vec{e_\theta}$

pour $r \geq a$ $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 J_0}{2r} a^2\,\vec{e_\theta}$

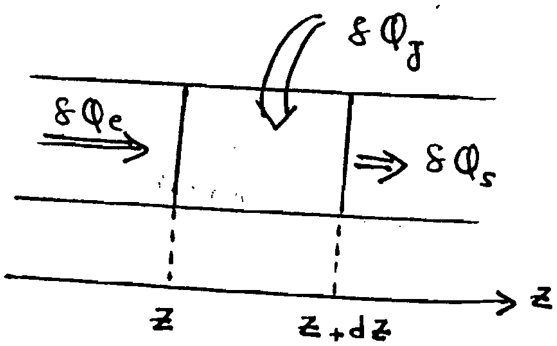
6) $\vec{R} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\dfrac{J_0^2 r}{2\gamma}\vec{e_r}$; à la surface $\vec{R} = -\dfrac{J_0^2 a}{2\gamma}\vec{e_r}$

$P_{rentre} = \oiint \vec{R}\cdot\vec{dS} = \dfrac{J_0^2 \pi a^2 L}{\gamma}$. ($\vec{n} = -\vec{e_r}$ pour la surface latérale) — 0,75

7- $P_{\text{rentre}} = \dfrac{J_0^2 \pi a^2 L}{\gamma} = R_e I^2 = R_e (J_0 \pi a^2)^2$ (0,5)

$\Rightarrow \quad R_e = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{L}{\pi a^2}$

8- $dU = \delta Q_e + \delta Q_J - \delta Q_s$



$dU = \mu c S dz \dfrac{\partial T}{\partial t} . dt$

$\delta Q_e = \left(-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_z S\, dt$ (0,7)

$\delta Q_S = \left(-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_{z+dz} S\, dt$

$$\left.\begin{array}{l} \delta Q_e - \delta Q_s = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} S\, dz\, dt \\ \delta Q_J = \dfrac{J_0^2}{\gamma} S\, dz\, dt \end{array}\right\} \quad \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dfrac{J_0^2}{\gamma}$$

$\dfrac{J_0^2}{\gamma}$: puissance volumique cédée par le champ électromagnétique au matériau

9- En régime permanent, l'équation devient : $\dfrac{d^2 T}{dz^2} = -\dfrac{J_0^2}{\lambda \gamma}$ (0,5)

$$\left.\begin{array}{l} T(z=0) = T_1 \\ T(z=L) = T_2 \end{array}\right\} \Rightarrow T(z) = \frac{-J_0^2}{2\lambda\gamma} z^2 + \left(T_2 - T_1 + \frac{J_0^2 L^2}{2\lambda\gamma}\right)\frac{z}{L} + T_1$$

10- Pour $J_0 = 0$, $T(z) = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{z}{L}$

$\vec{J}_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = (T_1 - T_2) \dfrac{\lambda}{L} \vec{e}_z$ (0,5)

$P_{th} = (T_1 - T_2) \dfrac{\lambda \pi a^2}{L}$: puissance traversant une section du cylindre.

$R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{P_{th}} = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{L}{\pi a^2}$.

11- $P(z) = \vec{J}_{th} \pi a^2 \vec{e}_z = -\lambda \dfrac{dT}{dz} \pi a^2$ (0,25)

$P(z) = -\pi a^2 \left[-\dfrac{J_0^2}{\gamma} z + \dfrac{J_0^2}{2\gamma} L + \dfrac{(T_2 - T_1)\lambda}{L}\right]$

12- $P_1 = -P(z=0) = \pi a^2 \left[\dfrac{J_0^2 L}{2\gamma} + \dfrac{(T_2 - T_1)\lambda}{L}\right]$

$P_2 = +P(z=L) = -\pi a^2 \left[\dfrac{-J_0^2 L}{2\gamma} + \dfrac{(T_2 - T_1)\lambda}{L}\right]$ (0,7)

$P_J = P_1 + P_2 = \dfrac{J_0^2 L}{\gamma} \pi a^2 = \iiint_V \vec{J}.\vec{E}\, d\tau$

La puissance reçue par le cylindre (par effet Joule) est donnée aux deux thermostats.

13- pour $T_1 = T_2 = T_0$, l'expression de $T(z)$ devient :

$$T(z) = T_0 + \alpha(-z^2 + Lz) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{J_0^2}{2\lambda\gamma}$$ (0,25)

14- La température en $z = \frac{L}{2}$ est maximale.

$$T_{Max} = T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + \frac{J_0^2 L^2}{8\lambda\gamma} = T_0 + \frac{I^2 L^2}{8\lambda\gamma(\pi a^2)^2}$$

Cette température doit rester inférieure à T_F $\Rightarrow$ (0,75)

$$I < I_0 = \frac{\pi a^2}{L}\sqrt{8\lambda\gamma(T_F - T_0)} = 10\ A$$

* Application : fusible

Problème 2

1- $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta\, \vec{e}_z + \sin\theta\, \vec{e}_x)$, $\vec{OP} = x\, \vec{e}_x \Rightarrow \vec{k}.\vec{OP} = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin\theta$ (0,75)

$$e^{-i\vec{k}.\vec{OP}} = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} x \sin\theta} = e^{-i2\pi x u} \quad \text{avec } u = \frac{\sin\theta}{\lambda} = \frac{\theta}{\lambda}$$

2- u s'exprime en m^{-1} : fréquence spatiale.

par analogie avec la fréquence temporelle qui s'exprime en s^{-1} (ou Hz). (0,25)

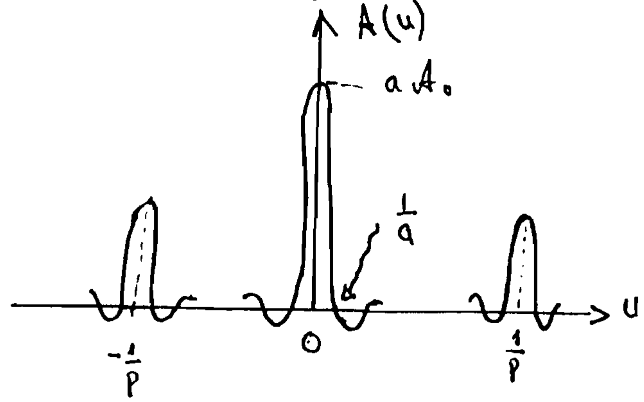
3- La lentille (L) permet d'observer dans son plan focal image la diffraction de Fraunhofer. (0,5)

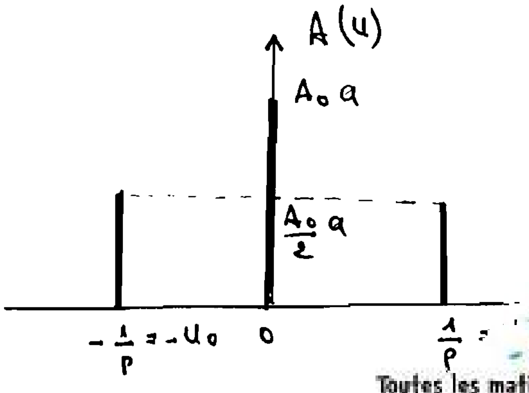
4) $$\underline{A}(u) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 + \frac{e^{\frac{i2\pi x}{p}} + e^{-\frac{i2\pi x}{p}}}{2}\right) e^{-i2\pi x u}\, dx$$ (1)

$$A(u) = aA_0\left[\operatorname{Sin_c}(\pi a u) + \frac{1}{2}\operatorname{Sin_c}\pi a\left(u - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Sin_c}\pi a\left(u + \frac{1}{p}\right)\right]$$

c'est la somme de 3 sinus cardinaux centrés en $-\frac{1}{p}, 0, \frac{1}{p}$.

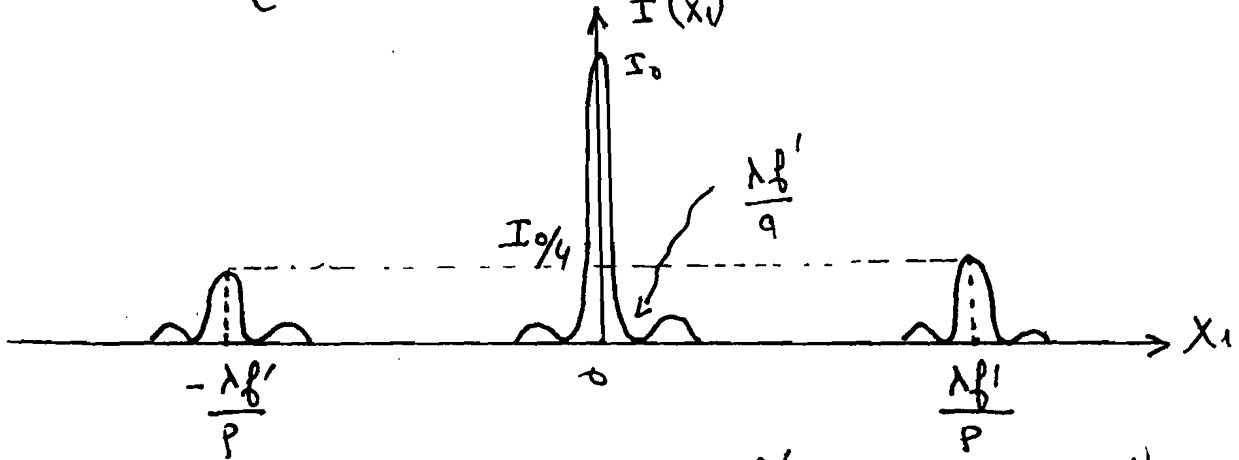
5/ Comme $\frac{1}{a} \ll \frac{1}{p}$, les sinus cardinaux ne se superposent pas. (0,5)





6- $x_1 \approx f' \operatorname{tg}\theta = f'\theta \Rightarrow u = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{x_1}{\lambda f'}$

$$I = A^2 = I_0 \left\{ \underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a x_1}{\lambda f'}\right)}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2 \pi a\left(\frac{x_1}{\lambda f'} - \frac{1}{p}\right)}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2 \pi a\left(\frac{x_1}{\lambda f'} + \frac{1}{p}\right)}_{I_3} \right\}$$



1

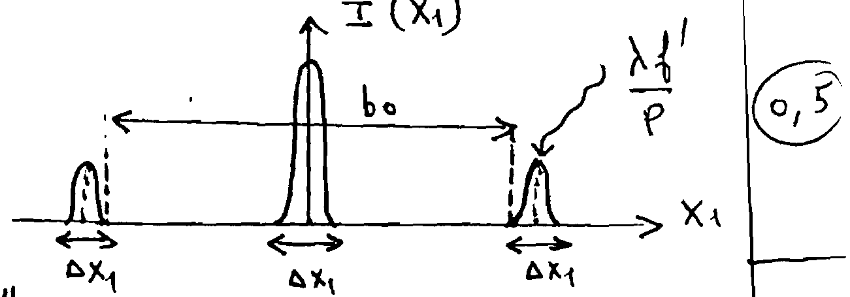
7- $\frac{1}{\overline{O_L A'}} - \frac{1}{\overline{O_L A}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{O_L A'} = d' = 2f'$; $(\overline{O_L A} = -2f')$ 1

$\gamma = \frac{\overline{O_L A'}}{\overline{O_L A}} = -1$

8.a - $\Delta x_1 = \frac{2\lambda f'}{a}$ 0,25

8.b - $b_0 = \frac{2\lambda f'}{p} - \Delta x_1$

$b_0 = 2\lambda f'\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a}\right)$. 0,5



8.c - En occultant les fréquences $\pm u_0$, du plan focal image, la figure de diffraction est celle relative à une fente de largeur a : tout se passe comme si l'objet était une fente de largeur a. On observe sur l'écran (E) l'image de la fente : bande de largeur a uniformément éclairée. 0,5

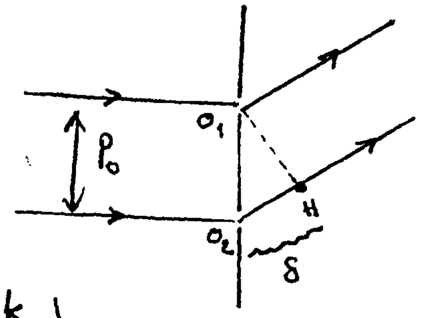
8.d - La fréquence nulle est à l'origine de l'éclairement uniforme dans l'image.

Les basses fréquences du spectre correspondent à des éclairements uniformes dans l'objet.

Les H.F correspondent aux détails fins de l'objet. 0,25

9- $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} p_0 \sin\theta$. (0,5)

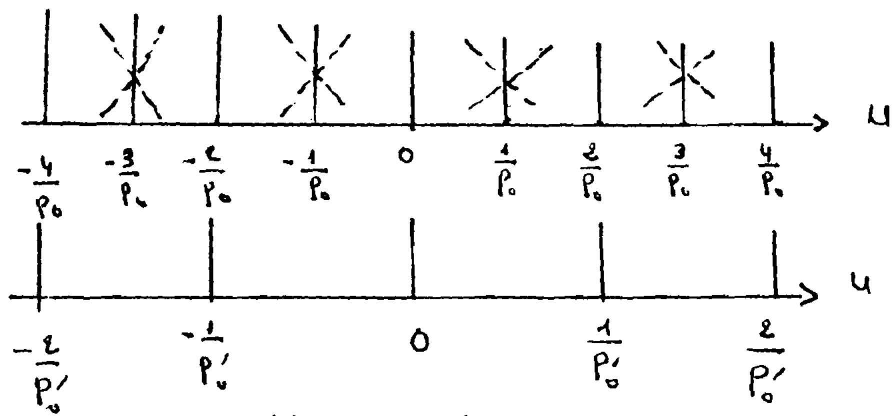
pour θ faible, $\varphi = \frac{2\pi p_0 \theta}{\lambda}$



10- Le maximum principal d'ordre k correspond à $\varphi = 2k\pi \Rightarrow \theta_k = \frac{k}{p_0}\lambda$ (0,5)

$u = \frac{\theta}{\lambda} \Rightarrow u_k = \frac{k}{p_0}$.

11- si on occulte les maxima d'ordre impair dans la figure de diffraction donnée par le réseau de pas p_0, la figure de diffraction obtenue est alors celle relative à un réseau de pas $\frac{p_0}{2} = p_1$



(0,75)

tout se passe comme si l'objet était un réseau de pas $p_1 = \frac{p_0}{2}$

sur l'écran (E) on observe l'image d'un réseau de pas p_1.

12- le premier minimum nul correspond à une fréquence égale à $\frac{\frac{2\pi}{N}}{2\pi p_0} = \frac{1}{N p_0}$ (0,5)

or $a = N p_0 \Rightarrow$ cette fréquence est égale à $\frac{1}{a}$.

Le spectre est celui associé à une fente de largeur a.