

PROBLEME 1 : CONDUCTION ET RAYONNEMENT THERMIQUES

1.	Régime permanent		
1.	<p>Considérons une tranche de la barre de longueur dy. En régime permanent, la somme des puissances thermiques qu'elle reçoit par conduction à travers ses deux faces d'abscisses y et $y+dy$ est nulle:</p> $[j_Q(y) - j_Q(y+dy)] A = 0 \Rightarrow -\frac{dj_Q}{dy} = 0.$ <p>Or $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ d'où $\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$</p> <p>$\Rightarrow T(y) = ay + b$. les C.L : $T(y=0) = T_1$ et $T(y=d) = T_2$ imposent:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $T(y) = \frac{T_2 - T_1}{d} y + T_1$ </div>		0.25
2.a	<p>Entre t et $t+dt$, la matière contenue dans la tranche de la barre reçoit les quantités de chaleur $\delta Q(y)$ et $\delta Q(y+dy)$ par conduction à travers ses deux faces d'abscisses y et $y+dy$ portées respectivement aux températures $T(y)$ et $T(y+dy)$:</p> $\delta Q(y) = j_Q(y) A dt = -\lambda \frac{dT(y)}{dy} A dt = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} A dt$ $\delta Q(y+dy) = -j_Q(y+dy) A dt = \lambda \frac{dT}{dy}(y+dy) A dt = \lambda \frac{T_2 - T_1}{d} A dt$ <p>L'entropie d'échange de cette tranche s'écrit donc :</p> $\delta S_e = \frac{\delta Q(y)}{T(y)} + \frac{\delta Q(y+dy)}{T(y+dy)} = \lambda \frac{T_2 - T_1}{d} \left[\frac{1}{T(y+dy)} - \frac{1}{T(y)} \right] A dt$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\delta S_e = -\lambda \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)^2 \frac{dy}{T^2(y)} A dt$ </div>		0.5
2.b	Le transfert thermique se fait du corps chaud vers le corps froid: c'est une transformation irréversible qui s'accompagne donc d'une création d'entropie.		0.25
2.c	<p>Puisque le régime est permanent, l'entropie de cette tranche est constante.</p> <p>L'entropie créée δS_c par unité de temps compense donc exactement l'entropie d'échange δS_e par unité de temps : $\delta S_c = -\delta S_e$.</p> <p>L'entropie créée par unité de temps et par unité de volume s'écrit alors :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\dot{S}_{v,c} = \lambda \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)^2 \frac{1}{T^2(y)}$ </div>		0.25
2.d	<p>$\dot{S}_{v,c}$ est maximale pour $T(y) = T_2 < T_1$.</p> <p>Ce résultat était prévisible puisque, pour un flux de chaleur δQ donné, la variation d'entropie est d'autant plus grande que la température du thermostat est plus faible.</p>		0.25 0.25

II.	<p><u>Régime variable</u></p> <p>1. Entre t et $t+dt$, la matière contenue dans la tranche reçoit la chaleur par conduction à travers ses deux faces d'abscisses:</p> <p>y: $\delta Q(y,t) = j_Q(y,t) A dt$,</p> <p>$y+dy$: $\delta Q(y+dy,t) = -j_Q(y+dy,t) A dt$</p> <p>d'où: $\delta Q(y,t) - \delta Q(y+dy,t) = \rho c A dy dT \Rightarrow$</p> $[j_Q(y,t) - j_Q(y+dy,t)] A dt = \rho c A dy dT$ $\Rightarrow -\frac{\partial j_Q}{\partial y} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2} - \frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = 0$ <p>En posant $\theta = T - T_e$ et $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$, on obtient :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $a^2 \frac{\partial^2 \theta(y,t)}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta(y,t)}{\partial t} = 0$ </div>	0.5
2.	<p>On pose $\theta(t) = f(y) g(t)$ dans l'équation précédente, on obtient :</p> $\frac{g'(t)}{g(t)} = a^2 \frac{f''(y)}{f(y)} = v$, d'où : <p>$g'(t) - v g(t) = 0$: (1) et $f''(y) - \frac{v}{a^2} f(y) = 0$: (2)</p>	0.25 0.5
3.	<p>Une solution de (1) est de la forme: $g(t) = E e^{vt}$, où E est une constante.</p> <p>Comme nous cherchons une solution tel que l'écart de température θ décroît lorsque le temps augmente, alors la constante v doit être nécessairement négative. On pose $v = -k^2$.</p>	0.25 0.5
4.	<p>La solution de (2) est de la forme $f(y) = C \cos\left(\frac{k}{a}y\right) + D \sin\left(\frac{k}{a}y\right)$, C et D sont des constantes.</p> <p>Enfin : $\theta_k(y,t) = T(y,t) - T_e = [A_k \cos\left(\frac{k}{a}y\right) + B_k \sin\left(\frac{k}{a}y\right)] e^{-k^2 t}$</p> <p>Soit : $\alpha = \frac{k}{a}$ et $\beta = -k^2$.</p> $J_Q(\Pi_1) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{y=0} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big _{y=0} \Rightarrow J_Q(\Pi_1) = -\lambda \frac{k}{a} B_k e^{-k^2 t}$	0.25 0.5 0.5
5.	<p>$J_Q(\Pi_1) = J_{Qa}$ traduit la continuité du flux thermique sur l'interface entre les deux milieux.</p> $-\lambda \frac{k}{a} B_k e^{-k^2 t} = -h(T_e - T_1) = h \theta_k(y=0,t) = h A_k e^{-k^2 t}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $B_k = -\frac{ha}{\lambda k} A_k$ </div>	0.25 0.25

	$\theta_k(y,t) = A_k \left\{ \cos\left(\frac{k}{a}y\right) - \frac{ha}{\lambda k} \sin\left(\frac{k}{a}y\right) \right\} e^{-k^2 t}$	0.25
6.	<p>Le plan $\Pi_2(y=-e)$ est en contact avec un thermostat de température T_e. Nous avons donc : $T(\Pi_2) = T(-e,t) = T_e \Rightarrow T(-e,t) - T_e = \theta_k(-e,t) = 0$</p> $\Rightarrow \cos\left(\frac{ke}{a}\right) + \frac{ha}{\lambda k} \sin\left(\frac{ke}{a}\right) = 0$ $\operatorname{tg}\left(\frac{ke}{a}\right) = -\frac{\lambda k}{ha} \quad (3)$ <p>qui se met sous la forme : $\operatorname{tg}X = -\frac{\lambda}{he}X$ avec $X = \frac{ke}{a}$</p> <p>Les intersections des courbes des fonctions $F = \operatorname{tg}X$ et $G = -\frac{\lambda}{he}X$ donnent les solutions de l'équation (3).</p>	0.5
III	Bilan radiatif	
1.a	$M = \sigma T^4$	0.25
1.b	$P_a = \sigma A T_1^4 + \sigma A T_2^4$ $P_r = \sigma A T^4 + \sigma A T^4 = 2 \sigma A T^4$	0.25 0.25
1.c	<p>A l'équilibre $P_a = P_r$</p> <p>Ainsi $T_e = \left[\frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right]^{1/4}$</p> <p>AN. $T_e = 278,13 \text{ K}$.</p>	0.5 0.25
1.d	$\lambda_m T_e = 2898 \mu\text{m} \Rightarrow \lambda_m = 10,42 \mu\text{m}$. A la température d'équilibre T_e , l'écran émet un rayonnement dans l'infrarouge.	0.25 0.25
2.a	$\delta Q_1 = [\sigma A T_1^4 - \sigma A T^4] dt = \sigma A [T_1^4 - T^4] dt$	0.25
2.b	<p>On pose $\Delta T = T_1 - T$ avec $\Delta T \ll T_1$.</p> $T^4 = (T_1 - \Delta T)^4 = T_1^4 \left(1 - \frac{\Delta T}{T_1}\right)^4 \approx T_1^4 \left(1 - 4 \frac{\Delta T}{T_1}\right) \Rightarrow$ $\delta Q_1 \approx 4 \sigma A T_1^3 (T_1 - T) dt = \gamma_1 (T_1 - T) dt \quad \text{avec } \gamma_1 = 4 \sigma A T_1^3.$	0.5
2.c	$\delta Q_2 \approx 4 \sigma A T_2^3 (T_2 - T) dt = \gamma_2 (T_2 - T) dt \quad \text{avec } \gamma_2 = 4 \sigma A T_2^3.$	0.25
2.d	$\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma \Rightarrow$ $\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = \gamma (T_1 + T_2 - 2T) dt$	0.25

2.e	$\delta Q = mcdT \Rightarrow \gamma(T_1 + T_2 - 2T) dt = \rho A e c dT$ $\Rightarrow \frac{dT}{T - \frac{T_1 + T_2}{2}} = -\frac{2\gamma}{\rho A e c} dt = \frac{8\sigma T_1^3}{\rho e c} dt = -\frac{dt}{\tau}$ <p>avec $\tau = \frac{\rho e c}{8\sigma T_1^3}$</p> <p>En utilisant la condition initiale $T(t=0) = T_0$, on obtient:</p> $T(t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \left(T_0 - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$ <p>AN. $\tau = 237,73 \text{ s} = 3,96 \text{ min} \approx 4 \text{ mn.}$</p>	0.5 0.25 0.25 0.25
2.f	<p>Comme $t \gg \tau$, la température finale s'écrit alors : $T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$</p> <p>AN. $T_f = 278 \text{ K.}$</p> <p>Le bilan thermique approché donne pour la température finale $T_f = 278 \text{ K}$, qui est la température d'équilibre, une valeur très proche de la température exacte $T_e = 278,13 \text{ K}$ calculée en 1.c). Les approximations utilisées sont donc valables.</p>	0.25 0.25 0.25
3.	<p>Les écrans limitent les échanges thermiques entre les deux parois.</p> <p>En effet, en régime permanent, la puissance émise par la paroi P_1 est :</p> <ul style="list-style-type: none"> • sans écran : $\Phi_0 = \gamma (T_1 - T_2) = 10 \gamma$ • avec 1 écran : $\Phi_1 = \gamma (T_1 - T_e) = 5 \gamma$ • avec 2 écrans : $\Phi_2 = \gamma (T_1 - T_e) < \Phi_1$ 	0.25 0.5

PROBLEME 2

I
1.a $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}_i) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}_i) - \Delta \vec{E}_i = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B}_i = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2} ; i=1,2$ 0,5

$$\Delta \vec{E}_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2} \quad i=1,2 \quad -k_i^2 \vec{E}_i = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_i$$

$$\Delta \vec{u} \quad k_1^2 = k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 ; k_0 = \frac{\omega}{c}$$

1.b $\vec{k}_1 = k_0 [\sin \alpha \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_y]$ 0,25

$$\vec{k}_2 = k_0 [\sin \alpha \vec{u}_z + \cos \alpha \vec{u}_y]$$
 0,25

1.c $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = e^{i(\omega t - k_0 z \sin \alpha)} \left[\vec{u}_x \left[E_{01} e^{ik_0 y \cos \alpha} - E_{02} e^{-ik_0 y \cos \alpha} \right] \right]$

on pose $k_g = k_0 \sin \alpha$ et $\beta = k_0 \cos \alpha$

$$\vec{E} = \left(E_{01} e^{i\beta y} + E_{02} e^{-i\beta y} \right) e^{i(\omega t - k_g z)} \vec{u}_x$$

k_g représente le nbre d'onde dans le guide. 0,25

1.d le champ électrique résultant est tangent aux surfaces $y=0$ et $y=d$; il est donc continu à la traversée de chaque surface. Ainsi 0,25

en $y=0$ $(E_{01} + E_{02}) e^{i(\omega t - k_g z)} = \overset{\text{conducteur}}{E_x(y=0^-)}$ 0,25

en $y=d$ $(E_{01} e^{i\beta d} + E_{02} e^{-i\beta d}) e^{i(\omega t - k_g z)} = \overset{\text{conducteur}}{E_x(y=d^+)}$ 0,25

avec $\overset{\text{conducteur}}{E_x(y=0^-)}$ et $\overset{\text{conducteur}}{E_x(y=d^+)}$ représentent le champ des plans conducteurs. Comme il s'agit de conducteurs parfaits $\overset{\text{conducteur}}{E_x(y=0^-)} = \overset{\text{conducteur}}{E_x(y=d^+)} = 0$. 0,25

Ainsi

$$(E_{01} + E_{02}) e^{i(\omega t - k_g z)} = 0 \quad \forall t \text{ et } \forall z$$

$$\text{et } (E_{01} e^{i\beta d} + E_{02} e^{-i\beta d}) e^{i(\omega t - k_g z)} = 0$$

$$\begin{cases} E_{01} = -E_{02} \\ \text{et } \sin(\beta d) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{01} = -E_{02} \\ \text{et } \beta d = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\boxed{E_{01} = -E_{02}} ; \boxed{\beta = \frac{n\pi}{d} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

1.e le champ résultant vérifie l'équation d'onde
 $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (l'équation d'onde est linéaire donc le thm de superposition est applicable).

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \vec{u}_x$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = -(\beta^2 + k_g^2) E_x \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x \vec{u}_x \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow k_g^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$$

$$1.d \rightarrow \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \Rightarrow \left\| \left(\frac{1}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{n}{2d} \right)^2 \right.$$

$n \in \mathbb{N}^+$

0,5

1.f Pour qu'il y ait propagation dans le guide k_g doit être réel $\Rightarrow k_g^2 > 0 \Rightarrow \omega^2 > \beta^2 c^2 = \left(\frac{n\pi c}{d} \right)^2$

$$\omega > \omega_{cn} = \frac{n\pi c}{d} ; f_{cn} = \frac{\omega_{cn}}{2\pi} = \frac{nc}{2d}$$

$f > f_{c,n} = \frac{nc}{2d}$; $f_{c,n}$ fréquence de coupure du guide.

0,5

$$1.g \quad v_g = \frac{\omega}{k_g} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f} \right)^2}}$$

0,25

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f} \right)^2}$$

0,25

$$v_p \cdot v_g = c^2$$

0,25

v_p dépend de f ; le milieu est donc dispersif.

0,25

$$2.a \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad -i\omega \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ B_z = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_x}{\partial x} \end{cases}$$

$$\underline{B}_x = 0 \quad \underline{B}_y = \frac{k_g}{\omega} \underline{E}_x \quad ; \quad \underline{B}_z = \frac{2\beta \epsilon_0}{\omega} \cos(\beta y) \cdot e^{i(\omega t - k_g z)}$$

$$\underline{B}_x = 0$$

$$\underline{B}_y = 2i \frac{k_g}{\omega} E_{01} \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{i(\omega t - k_g z)}$$

$$\underline{B}_z = \frac{2n\pi}{d\omega} E_{01} \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{i(\omega t - k_g z)}$$

$\underline{B}_z \neq 0 \Rightarrow \vec{B}$ n'est pas transverse

$\vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}$ est transverse

Il s'agit d'une onde transverse électrique qui a un caractère progressive dans la direction des z et stationnaire suivant la direction des y .

2.6

$$\vec{R} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E_x & 0 \\ 0 & B_y \\ 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -E_x B_z \\ E_x B_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{E_{01}^2 n\pi}{\omega d} \sin\left(\frac{2n\pi y}{d}\right) \sin(2(\omega t - k_g z)) \\ \frac{4E_{01}^2 k_g}{\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \sin^2(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{2E_{01}^2 k_g}{\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \vec{u}_z \quad \text{car}$$

$$\langle \sin^2(\omega t - k_g z) \rangle = 0$$

0,5

0,25

0,25

0,5

$$P = \frac{2E_{01}^2 k_g}{\mu_0 \omega} l \int_0^d \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{d} \right) dy \text{ or:}$$

$$\int_0^d \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{d} \right) dy = \frac{1}{2} \left[\int_0^d \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi y}{d} \right) \right] dy \right]$$

$$= \frac{d}{2}$$

Ainsi

$$P = \frac{E_{01}^2 k_g l d}{\mu_0 \omega} = \frac{E_{01}^2 l d}{\mu_0 v_\varphi}$$

0,5

2.c

$$\langle u_{em} \rangle = \langle \epsilon_0 E^2/2 \rangle + \langle \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle$$

$$= \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} \sin^2(\beta y) + \left(\frac{k_g}{\omega} \right)^2 \sin^2(\beta y) + \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 \cos^2(\beta y) \right]$$

or $\beta^2/\omega^2 = 1/c^2 - (k_g/\omega)^2$ (relation de dispersion)

Donc

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_g}{\omega} \right)^2 (\cos^2(\beta y) - \sin^2(\beta y)) \right]$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_g}{\omega} \right)^2 \cos(2\beta y) \right]$$

0,5

$$\beta = \frac{n\pi}{d}$$

2.d

Pendant dt , l'énergie moyenne qui traverse la section $S = ld$ est celle qui est contenue dans le volume $ld v_e dt$

L'énergie moyenne qui traverse la section S est:

$$P dt = \frac{E_{01}^2 l d}{\mu_0 v_\varphi} dt$$

l'énergie moyenne contenue dans le volume
 d.l $v_e dt$ est $U_{em} = \int_{x=0}^l \int_{y=0}^d \int_{z=0}^d \langle u_{em} \rangle dx dy dz$

$$= \frac{E_{01}^2}{\mu_0} l v_e dt \int_{y=0}^d \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_2}{\omega}\right)^2 \cos^2(\beta y) \right] dy$$

or $\int_{y=0}^d \cos(\beta y) dy = \int_{y=0}^d \cos\left(\frac{2n\pi y}{d}\right) dy = 0$

D'où $U_{em} = \frac{E_{01}^2 l v_e dt}{\mu_0 c^2} d$

$$P dt = \frac{E_{01}^2 l v_e dt}{\mu_0} \frac{d}{c^2}$$

$$\frac{E_{01}^2 l d}{\mu_0 v_e} dt = \frac{E_{01}^2 l v_e d}{\mu_0 c^2} dt \Rightarrow v_e = \frac{c^2}{v_e} = v_g$$

l'énergie se propage avec la vitesse de groupe v_g

2.e Si les parois étaient de conductivité finie on aura une dissipation de l'énergie par effet Joule dans les parois.

3.a $\vec{E}(y=d^-) = \vec{E}_{\text{inc}}(y=d^+) = \vec{0}$

Comme $E_{01} = -E_{02}$ il faut que le déphasage entre l'onde réfléchie et l'onde incidente en un pt de la surface ($y=d$) soit égal à $2n\pi$

3.b On a $\varphi_{\text{ref}}(P) = \varphi_{\text{ref}}(I)$ car P et I appartiennent au même plan d'onde (correspondant à l'onde réfléchie)

P et F \in au m^{ême} plan d'onde de l'onde incidente donc $\varphi_{\text{incid}}(P) = \varphi_{\text{incid}}(F)$

$$\Delta\varphi(E) = \varphi_{\text{ref}}(E) - \varphi_{\text{incid}}(E) = \varphi_{\text{ref}}(I) - \varphi_{\text{incid}}(F)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} IF$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} IJ = 2m\pi \quad m \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{IJ = IF = m\lambda_0} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

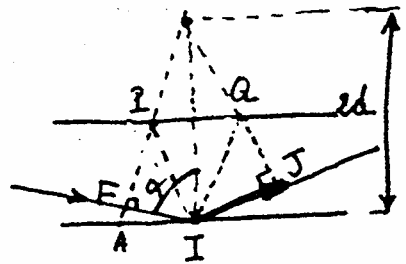
3.c

$$\cos\alpha = \frac{IF}{2d}$$

$$\Rightarrow \underline{IF = 2d \cos\alpha}$$

or $IF = m\lambda_0$

$$\text{D'où } \boxed{\cos\alpha = \frac{m\lambda_0}{2d}}$$



$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{IF}{IA} \Rightarrow AI = \frac{IF}{\sin\alpha} = \frac{m\lambda_0}{\sin\alpha}$$

$$\frac{AI}{m} = \frac{\lambda_0}{\sin\alpha} \quad \text{or } k_g = k_0 \sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g} = \frac{\sin\alpha}{\lambda_0}$$

D'où $\frac{AI}{m} = \lambda_g$ longueur d'onde dans le guide.

On a $\sin\alpha = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}$ et $\cos\alpha = \frac{m\lambda_0}{2d}$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{m\lambda_0}{2d}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_0^2} - \left(\frac{m}{2d}\right)^2}$$

Soit $k_g^2 = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$

0,5

0,25

0,25

0,25

0,25

0,25

II

Cavité résonante

$$1.a \quad \vec{E}_1^+ = -\sqrt{R} \sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t - ky)} e^{-ikd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$1.b \quad \vec{E}_{2n+1}^+ = -\sqrt{R} \sqrt{T} R^n E_0 e^{i(\omega t - ky)} e^{-i(2n+1)kd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$2.a \quad \vec{E}_2^- = R \sqrt{T} E_0 e^{i\omega t} e^{-2ikd} e^{-ik(d-y)} \vec{u}_x \\ = R \sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t + ky)} e^{-3ikd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$2.b \quad \vec{E}_{2n}^- = R^n \sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t + ky)} e^{-(2n+1)ikd} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$3. \quad \vec{E}_{2m+1}^+ + \vec{E}_{2n}^- = E_0 \sqrt{T} R^n e^{-i(2n+1)kd} e^{i\omega t} \begin{bmatrix} e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \\ \sqrt{R} e^{-iky} \end{bmatrix}$$

$$\vec{E} = E_0 \sqrt{T} e^{i\omega t} \begin{bmatrix} e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \\ \sqrt{R} e^{-iky} \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} R^n e^{-i(2n+1)kd} \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = E_0 \sqrt{T} e^{i\omega t} \begin{bmatrix} e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \\ \sqrt{R} e^{-iky} \end{bmatrix} \frac{e^{-ikd}}{1 - R e^{-2ikd}} \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = \frac{E_0 \sqrt{T} e^{-ikd}}{1 - R e^{-2ikd}} e^{i\omega t} \begin{bmatrix} e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky} \\ \sqrt{R} e^{-iky} \end{bmatrix} \vec{u}_x \quad 0,5$$

$$4. \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(y) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\delta E_x}{\delta y} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow B_x = 0; B_y = 0; B_z = \frac{1}{i\omega} \frac{\delta E_x}{\delta y}$$

$$\vec{B}_z = \frac{k}{\omega} \frac{E_0 \sqrt{T} e^{i(\omega t - kd)}}{1 - R e^{-2ikd}} \begin{bmatrix} e^{iky} + \sqrt{R} e^{-iky} \\ 0 \end{bmatrix} \vec{u}_z \quad 0,5$$

5.

$$5.a \quad \langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle$$

$$\langle u_e \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\vec{E} \vec{E}^*) \\ = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{E_0^2 T \left[1 + R - 2\sqrt{R} \cos(2ky) \right]}{1 + R^2 - 2R \cos(2kd)}$$

$$\begin{aligned} \langle u_m \rangle &= \frac{1}{4\mu_0} \operatorname{Re} (\underline{B} \underline{B}^*) \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 E_0^2 T \frac{1}{1+R^2 - 2R \cos(2kd)} (1+R+2\sqrt{R} \cos 2ky) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{T (1+R+2\sqrt{R} \cos 2ky)}{1+R^2 - 2R \cos(2kd)} \end{aligned}$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{T \cdot 2 (1+R)}{1+R^2 - 2R \cos 2kd} \quad \text{or } T=1-R$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{1-R^2}{1+R^2 - 2R \cos 2kd}$$

0,5

+ $\langle u_{em} \rangle$ est indépendante de y , elle est uniforme.

5/b $\langle U_{em} \rangle = \langle u_{em} \rangle S d$

$$= \frac{S d \epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{1-R^2}{1+R^2 - 2R \cos 2kd}$$

0,25

6 $\langle u_{em} \rangle$ est maximale si $1+R^2 - 2R \cos 2kd$ est minimale i.e. si $\cos 2kd = +1$ i.e.

$$2kd = 2m\pi \quad m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow kd = \frac{m\pi}{m \in \mathbb{N}^*}$$

$$\frac{2\pi d f}{c} = m\pi \Rightarrow \underline{f_m = \frac{mc}{2d} \quad m \in \mathbb{N}^*}$$

0,5

$$\langle u_{em} \rangle (f = f_m) = \underline{U_{\text{Max}} = \frac{\epsilon_0 S d}{2} E_0^2 \frac{1+R}{1-R}}$$

0,5

• $f_m = f_{c,m}$

les fréquences de résonance f_m coïncident avec les fréquences de coupure du guide formé par les plans conducteurs parfaits (et donc avec les fréquences propres du guide formé par les plans conducteurs parfaits)

7.a $f_1 = \frac{c}{2d}$; $2kd = 2 \cdot \frac{2\pi}{c} f d = \frac{2\pi f}{f_1}$

Ainsi $\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{1-R^2}{1+R^2-2R \cos\left(\frac{2\pi f}{f_1}\right)}$ 0,25

7.b $f = \Delta f + f_m$

$\frac{f}{f_1} = \frac{\Delta f}{f_1} + n \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi f}{f_1}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{2\pi \Delta f}{f_1}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \Delta f}{f_1}\right) \approx 1 - 2\left(\frac{\pi \Delta f}{f_1}\right)^2$ 0,25

Ainsi

$\langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{1-R^2}{1+R^2-2R + 4R \left(\frac{\pi \Delta f}{f_1}\right)^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{(1-R^2)/(1-R)^2}{1 + \frac{4\pi^2 R}{(1-R)^2} \left(\frac{\Delta f}{f_1}\right)^2}$

$U_{Max} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S d \frac{1+R}{1-R}$

$F^2 = \frac{\pi^2 R}{(1-R)^2} \rightarrow F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$ 0,5

Ainsi

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{U_{max}}{1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f}{f_1}\right)^2} \quad \text{avec } F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

7.c



0,5

7.d

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{U_{max}}{2} \Rightarrow 2 = 1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f_{1/2}}{f_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4F^2} = \left(\frac{\Delta f_{1/2}}{f_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow |\Delta f_{1/2}| = \frac{f_1}{2F}$$

0,5

Ainsi

$$\Delta\nu = \frac{f_1}{F} \rightarrow \frac{\Delta\nu}{f_1} = \frac{1}{F} = \frac{1-R}{\pi R}$$

$$R=0,9 \quad F=29,8 \quad ; \quad \frac{\Delta\nu}{f_1} = 3,36 \cdot 10^{-2}$$

$$R=0,95 \quad F=61,2 \quad ; \quad \frac{\Delta\nu}{f_1} = 1,63 \cdot 10^{-2}$$

$$R=0,99 \quad F=312,6 \quad ; \quad \frac{\Delta\nu}{f_1} = 3,2 \cdot 10^{-3}$$

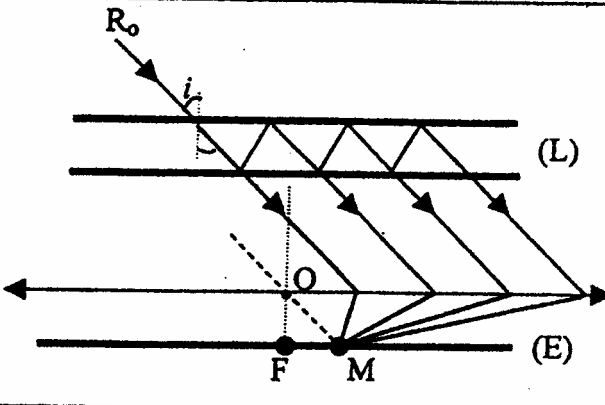
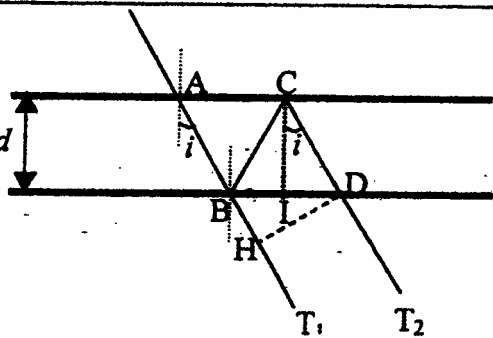
0,75

Plus le coefficient de réflexion en puissance est grand, plus l'énergie électromagnétique est concentrée sur f_0 . En augmentant R on réduit l'étendue spectrale de la répartition de l'énergie.

0,5

Application : Réalisation des sources fortement cohérentes.

III- Interférences à deux ondes

1.	<p> $I_1 = T^2 I_0$; $I_2 = R^2 T^2 I_0 = R^2 I_1$; $I_3 = R^4 T^2 I_0 = R^4 I_1$; $I_4 = R^6 T^2 I_0 = R^6 I_1$ AN. $R = 0.4$ et $T = 0.6$. $I_1 = 0.0576 I_0$; $I_2 = 0.0092 I_1$; $I_3 = 0.0015 I_1$; $I_4 = 2.36 \cdot 10^{-4} I_1$. On remarque que I_3 et $I_4 \ll I_2$, on peut donc se limiter à un phénomène d'interférences à deux ondes associées aux rayons T_1 et T_2. </p>	<p>1</p> <p>0.25</p>
2.a		0.25
2.b	 <p>La différence de marche δ entre deux rayons consécutifs T_1 et T_2 est :</p> $\delta = (BCD) - (BH)$ $(BCD) = 2 BC = 2 \frac{IC}{\cos i} = 2 \frac{d}{\cos i}$ $(BH) = BH = BD \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = 2 BI \sin i = 2 d \operatorname{tgi} \sin i$ <p>soit: $(BCD) - (BH) = \frac{2d}{\cos i} (1 - \sin^2 i) = 2d \cos i$</p> <p>Ainsi, la différence de marche δ entre deux rayons transmis successifs est :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\delta = 2 d \cos i$ </div>	0.5
2.c	<p>La figure d'interférences a F comme centre de symétrie et chaque cercle centré sur F représente l'ensemble des points de même ordre d'interférence: les franges obtenues sont donc des anneaux. Une frange d'interférences correspond à une différence de marche, $\delta = 2d \cos i = \text{constante}$, donc une valeur donnée de i: c'est pour cette raison que les franges ainsi obtenues sont appelées <i>franges d'égale inclinaison</i>.</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p>

3.	<p>Le contraste est : $C = \frac{2R}{1 + R^2}$</p> <table border="1" data-bbox="472 203 1147 282"> <tr> <td>R</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>0,4</td> <td>0,55</td> <td>0,7</td> </tr> </table> <p>Plus R est grand, plus la figure d'interférence est nette.</p>	R	0,2	0,3	0,4	C	0,4	0,55	0,7	0.25 0.5 0.25
R	0,2	0,3	0,4							
C	0,4	0,55	0,7							
4.a	<p>Au centre $i = 0$ et $\delta = 2d = p_0 \lambda_1 \Rightarrow p_0 = \frac{2d}{\lambda_1}$. AN. $p_0 = 18762$.</p> <p>Le centre est brillant puisque p_0 est un entier.</p>	0.25								
4.b	<p>Dans le cadre de l'approximation de Gauss, le rayon ρ_k du $k^{\text{ième}}$ anneau est:</p> $\rho_k = F' M = f \operatorname{tg} i_k \approx f i_k$ <p>L'ordre d'interférences $p_k = \frac{2d \cos i_k}{\lambda_1}$ décroît à partir du centre.</p> <p>Ainsi pour le $k^{\text{ième}}$ anneau brillant, l'ordre d'interférences est donné par :</p> $p_k = p_0 - k \Rightarrow p_0 - p_k = k = \frac{2d}{\lambda_1} (1 - \cos i_k)$ <p>L'angle i_k étant petit : $\cos i_k \approx 1 - \frac{i_k^2}{2}$ et par suite $k = \frac{d}{\lambda_1} i_k^2 \Rightarrow i_k = \sqrt{k \frac{\lambda_1}{d}}$</p> <p> finalement : $\rho_k = f \sqrt{k \frac{\lambda_1}{d}}$</p>	0.5								
4.c	<p>La distance séparant le $k^{\text{ième}}$ anneau brillant du $(k+1)$-ième anneau brillant:</p> $\Delta \rho_k = \rho_{k+1} - \rho_k = f \sqrt{\frac{\lambda_1}{d}} \sqrt{k} (\sqrt{1 + 1/k} - 1) \approx \frac{f}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{k d}}$ <p>L'écart étant proportionnel à l'inverse de la racine carrée du numéro k de l'anneau, les rayons se resserrent de plus en plus si l'on s'éloigne du centre (k croît). On ne peut donc pas déterminer d'interfrange.</p>	0.5 0.25								
5.a	<p>Chaque anneau brillant de rayon ρ_k correspond à un ordre d'interférences p_k tel que : $\delta = 2d \cos i_k \approx 2d \left(1 - \frac{i_k^2}{2}\right) = p_k \lambda$ d'où : $\lambda = \frac{2d}{p_k} \left(1 - \frac{\rho_k^2}{2f^2}\right)$.</p> <p>En différenciant la relation précédente en maintenant f, p_k et d constantes on obtient :</p> $\Delta \lambda = \frac{2d \rho_k}{p_k f^2} \Delta \rho_k$	0.5								
5.b	<p>Pour qu'il n'y ait pas chevauchement entre le $k^{\text{ième}}$ et le $(k+1)$ième anneaux brillants il faut que $\Delta \rho_k > \Delta \ell_k$.</p> <p>Comme $\Delta \ell_k = \frac{p_k f^2}{2d \rho_k} \Delta \lambda = \frac{p_k f}{2d \sqrt{k \frac{\lambda_1}{d}}} \Delta \lambda = \frac{p_k f}{2 \sqrt{k \lambda_1 d}} \Delta \lambda$</p> <p>On a alors $\frac{p_k f}{2 \sqrt{k \lambda_1 d}} \Delta \lambda < \frac{f}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{k d}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} < \frac{1}{p_k}}$</p>	0.5								