Proposition du corrigé de l'épreuve de Physique section MP

<u>Premier Problème</u>

A-

1.a) $I = \iint \vec{j}.\vec{dS} = \sigma \iint \vec{E}.\vec{dS} = \sigma E_0 S = \sigma E_0 \pi a^2$ 0,5

1.b) $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow \int_0^L \vec{E}.dz\vec{u}_z = -\int_A^B dV \Rightarrow V_A - V_B = E_0 L$ 1,5

D'où $V_A - V_B = \frac{I}{\sigma \pi a^2} L = \frac{L}{\sigma \pi a^2} I = R_0 I$ avec

$R_0 = \frac{L}{\sigma \pi a^2}$. 0,5

2.a) $P_v = \vec{j}.\vec{E} = \sigma E_0^2$

2.b) $P = \iiint P_v \, d\tau = \sigma E_0^2 \iiint d\tau = \sigma E_0^2 L \pi a^2$ 0,5

$= \frac{1}{\sigma}\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 L \pi a^2 = \frac{L}{\sigma \pi a^2} I^2 = R_0 I^2$

B.1) Un courant variable ($\vec{j} = \sigma \vec{E}(t)$) crée un champ magnétique variable (M.A), qui lui crée un champ électrique non homogène (MF) venant à se superposer à celui du générateur. Le champ électrique dans le conducteur ne peut donc pas être uniforme en régime variable. 1

B.2 a) L'équation locale de la conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$ Dans un conducteur ohmique $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et comme $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (MG) l'équat° de conservation de la charge dans un conducteur ohmique s'écrit $\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0}$. 0,25 0,25

B.2b) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ $\rho(M,t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ 0,5

$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$: temps de relaxation 0,25

A.N $\tau = \frac{1}{36\pi} \times \frac{1}{5,9} \times 10^{-16} = 1,5\, 10^{-19}\,s$ 0,25

$\frac{1}{\tau} \sim 10^{19}\,Hz$ Dans le domaine des freq Hertziennes le conducteur est localement neutre. 0,5

B.2c) $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad \vec{j}_c = \sigma \vec{E}$.

$\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}_c\|} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} = \frac{2\pi\varepsilon_0 f}{\sigma}$; $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}_c\|} \ll 1 \Rightarrow$

$f \ll \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = f_\ell$

A.N $f_\ell = \frac{5,9\ 10^7}{2 \times \pi \times 10^{-9}} 36.\pi$

$f_\ell = 18 \times 5,9 \times 10^{16} = 1,06.10^{18}$ Hz 0,5

Dans le domaine des frequences Hertzienne cette condition est largement vérifiée d'où $\|\vec{j}_D\|$ est négligeable devant $\|\vec{j}\|$.

B.3) $\underline{\vec{j}}(M,t) = \underline{j}(r)\, e^{-i\omega t}\, \vec{u}_z$

B.3a) Les equations de Maxwell s'écrivent: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (MG) 1

$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (MF), $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (MA) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (Mϕ)

B.3.b) $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

$= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$

$\Rightarrow \vec{\Delta} \vec{j} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

$\vec{\Delta} \underline{\vec{j}} = -\mu_0 i \omega \sigma \underline{\vec{j}}$ 0,5

D'où $\vec{\Delta} \underline{\vec{j}} + \frac{2i}{\delta^2} \underline{\vec{j}} = \vec{0}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

B.4)

$\left| \begin{array}{l} \vec{\Delta} \underline{\vec{j}} + \frac{2i}{\delta^2} \vec{j} = \vec{0} \\ \underline{\vec{j}} = \underline{j}(r) \vec{u}_z \end{array} \right.$ $\Rightarrow \Delta \underline{j} + \frac{2i}{\delta^2} \underline{j} = 0$ (1)

$\Delta \underline{j} = \frac{d^2 \underline{j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{j}}{dr}$

(1) s'écrit $\frac{d^2 \underline{j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{j}}{dr} + \frac{2i}{\delta^2} \underline{j} = 0$

$\frac{d\underline{j}}{dr} = \frac{d\underline{j}}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{1}{\delta} \frac{d\underline{j}}{dx}$; $\frac{d^2 \underline{j}}{dr^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 \underline{j}}{dx^2}$

D'où $\dfrac{d^2\underline{j}}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{d\underline{j}}{dx} + 2i\underline{j} = 0$ en divisant par $\underline{j}(0)$ on obtient :

$$\frac{d^2\underline{y}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\underline{y}}{dx} + 2i\underline{y} = 0$$ 0,5

B.5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)\,C_{2n}\,x^{2n-2} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} 2n\,C_{2n}\,x^{2n-1} = -2i\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}\,x^{2n}$

$$\sum_{p=0}^{\infty} 4(p+1)^2\,C_{2p+2}\,x^{2p} = -2i\sum_{p=0}^{\infty} C_{2p}\,x^{2p} \quad \forall x.$$

D'où $\quad 2(p+1)^2\,C_{2p+2} = -i\,C_{2p}$. avec $C_0 = 1$.

$$C_{2(p+1)} = \frac{-i}{2(p+1)^2}\,C_{2p} \Rightarrow C_{2p} = \frac{-i}{2p^2}\,C_{2p-2} \ (p \geq 1)$$

$$C_{2p} = \frac{-i}{2p^2}\cdot\frac{(-i)}{2(p-1)^2}\,\frac{(-i)}{2\cdot(p-2)^2}\cdots\cdots\underbrace{\frac{(-i)}{2\,1^2}}_{p=1}\,C_0$$

$$\begin{cases} C_{2p} = \dfrac{(-i)^p}{2^p(p!)^2}\,C_0 = \dfrac{(-i)^p}{2^p(p!)^2}\ ;\ p \geq 1. \\ C_0 = 1. \end{cases}$$ 1

Ainsi $\quad \underline{y} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{2^p(p!)^2}\,x^{2p}$

$$\underline{y}(x) = 1 - \frac{i}{2}x^2 - \frac{x^4}{16}$$ 0,25

$$|\underline{y}(x)|^2 = \left(1 - \frac{x^4}{16}\right)^2 + \frac{x^4}{4}$$

$$= 1 + \frac{x^8}{(16)^2} - \frac{x^4}{16}\times 2 + \frac{x^4}{4}$$ en s'arretant

à l'ordre 4 :

$$|\underline{y}(x)|^2 = 1 + \frac{x^4}{8} \Rightarrow Y(x) = \left(1 + \frac{x^4}{8}\right)^{1/2}$$ 0,25

B.6) $\alpha_1 = 0{,}054$ 0,25

$\alpha_2 = 10{,}8$ 0,25

$Y(\alpha_1) = \left(1 + \frac{\alpha_1^4}{8}\right)^{1/2} \simeq 1$ 0,25

$Y(\alpha_2) = 4{,}985$.

• Pour $\nu = \nu_1$ l'effet de peau ne se ressent pas puisque $|\underline{j}(\alpha_1)| \simeq |\underline{j}(0)|$: la valeur du courant sur la periphérie est égale à celle sur l'axe du cylindre. En revanche pour $\nu = \nu_2$ l'effet de peau est considérable puisque le courant sur la periphérie est environ cinq fois la valeur sur l'axe. 1

• L'effet de peau reste négligeable tant que le rayon du fil reste inferieur à l'épaisseur de peau : En effet pour $\alpha_1 = \frac{a}{\delta_1} = 0{,}054 \ll 1$ on a $|\underline{J}(\alpha_1)| \simeq |\underline{J}(0)|$ alors que pour $\alpha_2 = \frac{a}{\delta_2} = 10{,}8 > 1$ on a $|\underline{J}(\alpha_2)| \simeq 5|\underline{J}(0)|$.

B.7) $\rho(\alpha_1) = 1 + \frac{(0{,}054)^4}{48} \simeq 1$ 0,25

$\rho(\alpha_2) = 5{,}65$.

Dans le premier cas la resistance en régime variable est similaire à celle obtenue en régime continue. Cette augmentation nette de la resistance (pour $\nu = \nu_2$) s'explique par la locali- 1 sation du courant dans le voisinage immédiat de la surface du conducteur (question B.6).

I.2.a) Le miroir de Lloyd est équivalent aux trous d'Young
S joue à la fois le rôle d'une source primaire
et d'une source secondaire

$SS' = 2h$

La différence de marche géometrique des deux
rayons se supperposant en P est $\delta_{geo} = \frac{SS'x}{D}$
avec D = distance de l'écran au plan contenant
les deux sources SS'.

$D = l + d$.

Le rayon réflechi subit un déphasage de π
par rapport à celui incident et donc à la
différence de marche géometrique il faudrait
rajouter $\frac{\lambda_0}{2}$ correspondant à ce déphasage supplé- 1,5
mentaire de π $\left(\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{2}\right)$

$$\delta = \delta_{geo} + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2hx}{l+d} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Comme l'intensité de l'onde réflechie est égale
à celle incidente $I_1 = I_2 = I_0$ on obtient.

$$I(P) = 2I_{01}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{2hx}{l+d} + \frac{\lambda_0}{2}\right)\right)\right)$$

I.2.b) La frange rectiligne en $x = 0$ est tq $I = 0 \Rightarrow$
Elle est sombre. 0,5

I.2.c) L'interfrange est la période spatiale de
l'intensité $\frac{2\pi x}{i} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{2h}{l+d}x \Rightarrow$ 0,5

$$\underline{\underline{i = \frac{\lambda_0(l+d)}{2h}}} = 0,25\,mm$$

2.d) La position de l'image O_{im} de O est tq

$$\frac{1}{\overline{O_1O_{im}}} - \frac{1}{\overline{O_1O}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{O_1O_{im}} = \frac{f'\,\overline{O_1O}}{f'+\overline{O_1O}}$$ 0,5

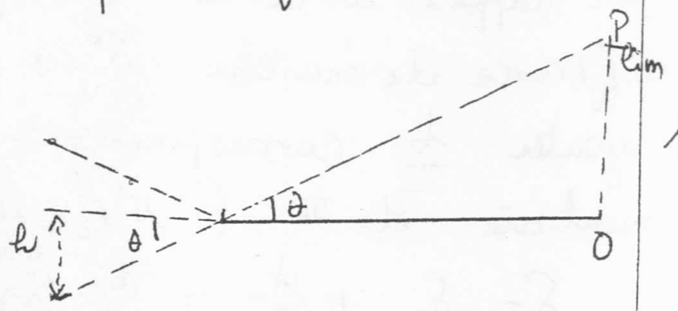
AN $$\overline{O_1O_{im}} = \frac{-10\times 12}{-12+10} = 60\,\text{cm}.$$

$$\frac{O_1O_{im}}{O_1O} = \frac{i_{im}}{i} = \frac{60}{12} = 5$$

D'où $$h = \frac{\lambda_0(l+d)}{2\,i_{im}}\,\frac{O_1O_{im}}{O_1O} \Rightarrow \text{AN } h = 0{,}3\,\text{mm}$$

2.e) $*\ tg\,\theta = \dfrac{h}{d} = \dfrac{OP_{lim}}{l} \Rightarrow OP_{lim} = l\,\dfrac{h}{d}$

OP_{lim} = largeur du champ d'interférence



Le nombre de franges sombres est 1

$$N_S = E\left(\frac{OP_{lim}}{i}\right)+1$$
$$= E(28{,}8)+1$$
$$= 29.$$

II.1) La différence de marche reste inchangée $\Rightarrow$ la figure d'interférence reste donc inchangée. 0,5

II.2) Les sources S_1, S_2 et S sont incohérentes leurs intensités s'ajoutent. D'autre part on a :

$I_1(P) = I_2(P) = I(P)$ Ainsi

$I_{tot} = 3(I(P))$ où $I(P)$ représente l'intensité au point P résultant du phénomène d'interférence produit par S. Les franges sont trois fois plus brillante qu'avec S seule. 1

II.3) a Chaque élément dX centré sur X produit

$$dI = \frac{2I_0'}{a}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{\lambda}\,\delta_{geo}(P)\right)dX$$

$$\delta_{geo}(P) = \frac{2(h+X)}{l+d}\,x$$

D'où $$dI(P) = \frac{2I_0'}{a}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{2(h+X)x}{l+d}\right)\right)dX$$

où X désigne l'abscisse de S par rapport au centre de la fente.

II.3.b) On pose $\beta = h + X \Rightarrow d\beta = dX$.

D'où

$$I(P) = \frac{2I_0'}{a}\int_{h-a/2}^{h+a/2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{2\beta x}{l+d}\right)\right)d\beta$$

$dI(P)$ represente l'intensité produite en P par l'élément dX. Les différentes sources elementaires constituant la fente sont incohérentes entre elles donc l'intensité résultante en P est la somme des intensités ce qui justifie la sommation précédente.

$$I(P) = 2I_0'\left(1 - \frac{2I_0'}{a}\,\frac{\lambda_0(l+d)}{4\pi\,\cancel{x}}\left[\sin\frac{4\pi\beta}{\lambda_0(l+d)}x\right]_{h-a/2}^{h+a/2}\right)$$

$$= 2I_0'\left(1 - \frac{\lambda_0(l+d)}{2\pi a x}\sin\left[\frac{4\pi x}{\lambda_0(l+d)}(h+a/2)\right] + \frac{\lambda_0(l+d)}{2\pi a x}\sin\left(\frac{4\pi x}{\lambda_0(l+d)}(h-a/2)\right)\right)$$

$$I(P) = 2I_0'\left(1 - \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0(l+d)}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right)$$

$$\begin{cases} I(P) = 2I_0\left(1 - \text{sinc}\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0(l+d)}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right) \\ i = \dfrac{\lambda_0(l+d)}{2h} \end{cases}$$ 1,5

Allure + Comment 0,5+0,5

II.3b) $C = \left| \text{sinc}\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0(l+d)}\right)\right|$

Les franges sont brouillées quand $C=0$ 0,5

c'st à dire quand $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{ax}{l+d} = n\pi \quad n\in\mathbb{N}^*$.

cad pour $x = \dfrac{\lambda_0(l+d)}{2\pi a}(n\pi)$

Elles disparaissent pour la première fois pour $x = \dfrac{\lambda_0(l+d)}{2a}$ réaparaissent ensuite mais faiblement contrastées disparaissent de nouveau pour $x = \dfrac{\lambda_0(l+d)}{a}$, etc....

III.

III.1) $\forall \lambda$ on a en $x=0$ $\delta = \dfrac{\lambda_0}{2} \Rightarrow$ noir : "frange" noire pour x proche de zéro on a irrisation des franges d'interférences. Plus loin il y a brouillage de la figure d'interference résultant de la superposition des interferences produites par chaque radiation de longueur d'onde λ_i c'est le blanc d'ordre supérieur. 0,5

III 2a) Il manque certaines longueurs d'onde dans le spectre analysé en x $\rightarrow$ Spectre cannelé. 0,5

II.2b) Une radiation de longueur d'onde λ_i éteinte correspond à des interférences destructives et donc à $\delta = \frac{2hx_0}{l+d} + \frac{\lambda_i}{2} = (2k+1)\frac{\lambda_i}{2}$; k entier

$\Rightarrow \frac{hx_0}{l+d} = k\frac{\lambda_i}{2}$ $\Rightarrow 0{,}4\,\mu m \leq \lambda_i \leq 0{,}7\,\mu m$ (avec $0{,}4\,\mu m = \lambda_1$ et $0{,}7\,\mu m = \lambda_2$)

$\Rightarrow \lambda_1 \leq \frac{2hx_0}{(l+d)k} \leq \lambda_2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{(l+d)k}{2hx_0} \leq \frac{1}{\lambda_1}$

$\Rightarrow \frac{2hx_0}{\lambda_2(l+d)} \leq k \leq \frac{2hx_0}{\lambda_1(l+d)}$ pour $x_0 = 1{,}5\,mm \rightarrow 5{,}14 \leq k \leq 9$

pour $x_0 = 3\,mm \rightarrow 10{,}28 \leq k \leq 18$

Pour $x_0 = 1{,}5$ mm on a 4 radiations éteintes 0,5

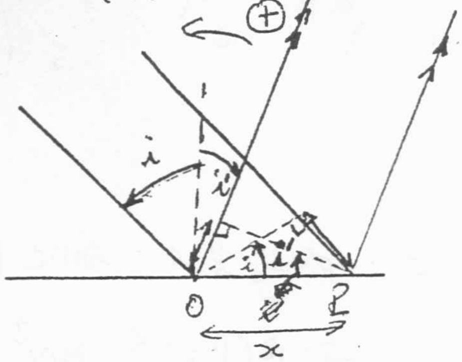
Pour $x_0 = 3$ mm on a 8 " " 0,5

Plus x_0 est grand plus le nombre de cannelure augmente. 0,5

B-1) $\underline{A} = \alpha \underline{s_0}\, l \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2\pi x}{\lambda} j (\sin i' + \sin i)} dx$

$\underline{A} = \alpha \underline{s_0}\, l\, a\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\sin i + \sin i')\right)$

$\begin{cases} I = \underline{A}\underline{A}^* = \alpha |\underline{s_0}|^2 (la)^2 \,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\sin i + \sin i')\right) \\ I_0 = \alpha |\underline{s_0}|^2 (la)^2 . \end{cases}$ 1,5



$(\vec{k_d} - \vec{k})\,\vec{OP} = -x(\sin i' + \sin i)$

I.2) $i'_{max} = -i \Rightarrow$ Direction donnée par l'optique géométrique (Loi de Descarte de la réflexion) 0,5 0,5

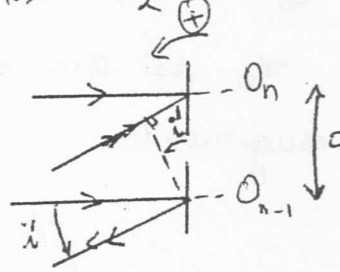
max secondaires tq $\frac{d}{dv}\,\mathrm{sinc}^2 v = 0 \Rightarrow v = \mathrm{tg}\, v$

$\Rightarrow v \simeq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $v \neq 0$ et $v \neq -1$

1er max secondaire $v \simeq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow I = 0{,}045\, I_0$ 0,5

2ème max secondaire $v \simeq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow I = 0{,}016\, I_0$. 0,5

II.1.a) On désigne par φ le déphasage entre deux points distants de d, appartenant à deux miroirs successifs $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\,(\sin i' ~~+ \sin i~~)$



$$\underline{A} = A_1^{diff}\left[1 + e^{j\varphi} + \dots + e^{j(N-1)\varphi}\right].$$

$$\underline{A} = \sum_{p=1}^{N} A_1^{diff}\, e^{j(p-1)\varphi}$$

$$= A_1^{diff}\,\frac{1-e^{jN\varphi}}{1-e^{j\varphi}}$$

où A_1^{diff} est l'amplitude complexe diffractée par le 1er miroir. (Origine des phases prise au niv. du 1er miroir) 1,5

$$= A_1^{diff}\, e^{j(N-1)\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$\underline{A} = \alpha\, \underline{s}_0\, l\, a\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin i'\right) e^{j\frac{(N-1)\varphi}{2}}\,\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

II.1.b) $$I = \alpha^2|\underline{s}_0|^2 (la)^2\, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin i'\right)\left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2$$

$$= I_0 N^2\, \mathrm{sinc}^2(\pi a u)\left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{N\sin\varphi/2}\right)^2$$

$$= I_{0R}\, \mathrm{sinc}^2(\pi a u)\left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{N\sin\varphi/2}\right)^2$$

D'où $I_R = I_{0R}\, \text{sinc}^2(\pi a u) \left(\dfrac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{N \sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2$; $\varphi = 2\pi d . u$ 0,5

$u = \dfrac{\sin i'}{\lambda}$; $I_{0R} = N^2 I_0$ 0,25x2

II.1.c) $\varphi = 2q\pi \Rightarrow d \sin i' = q\lambda_0$ 0,5

II.1.d) $d\varphi = 2\pi/N \Rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda} d \cos i'\, di' = \dfrac{2\pi}{N}$

Ainsi $\Delta i' = \dfrac{\lambda_0}{N d \cos i'} = \dfrac{\lambda_0}{L \cos i'}$ 0,5

II.2.a) on a $d \sin i'_q = q\lambda$ (1)

la différenciation de (1) à q fixé donne

$d \cos i'_q \, di'_q = q\, d\lambda$

$\rightarrow \Delta i'_q = \dfrac{q \Delta\lambda}{d \cos i'_q}$ 0,5

II.2.b) A la limite de résolution $\Delta i'_q = \Delta i'$

$\Rightarrow \Delta\lambda_{min} = \dfrac{\lambda d}{N d q} = \dfrac{\lambda}{Nq}$

Pour $q = 1$ $\Delta\lambda_{min} = 577 \times 10^{-3}$ nm 1

or $\Delta\lambda = 2{,}1$ nm $> \Delta\lambda_{min} \Rightarrow$ les longueurs d'ondes du doublet de Mercure sont séparées à l'ordre 1.