

Concours en Mathématiques et Physique

Session 2007

Corrigé de l'épreuve de physique



A- CONDUCTION – EFFET HALL		
I- CONDUCTEUR SOUMIS A UN CHAMP ELECTRIQUE		
I.1)	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ $\Rightarrow \vec{v}(t) = -\frac{\tau e}{m} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \vec{E}_0$ <p>τ : temps de relaxation</p>	0.5 1.5 0.5
I.2.a)	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_t = -\frac{\tau e}{m} \vec{E}_0$	1
I.2.b)	$\vec{j} = -n e \vec{v}_t = \frac{n \tau e^2}{m} \vec{E}_0$	1
I.2.c)	$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{n \tau e^2}{m}$	1
I.3.a)	$\vec{v}_t = -\mu \vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = -n e \vec{v}_t = n e \mu \vec{E}_0 = \gamma \vec{E}_0$ <p style="text-align: center;">$\gamma = n e \mu$</p> <p>$\gamma_1 = 6.05 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$ et $\gamma_2 = 10^2 \text{ S m}^{-1}$ $\gamma_1 > \gamma_2 \Rightarrow$ le matériau (1) est plus conducteur que le matériau (2)</p>	1.5 1
I.3.b)	$\gamma = \frac{n \tau e^2}{m} = n e \mu \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m \mu}{e}$ <p>$\tau = 3,07 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ Le régime permanent est très rapidement atteint.</p>	0.5 0.5 0.5
II- CONDUCTEUR SOUMIS A UN CHAMP ELECTRIQUE ET A UN CHAMP MAGNETIQUE		
Le champ magnétique agit sur les porteurs de charge par l'intermédiaire de la force :		

II.1.a)	$\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e \ \vec{v}\ \ \vec{B}\ \vec{u}_x = -\frac{1}{n} \ \vec{j}\ \ \vec{B}\ \vec{u}_x$ <p>Cette force tend à déplacer les électrons du plan $x = a/2$ vers le plan $x = -a/2$. Les électrons s'accumulent donc sur ce dernier qui se charge négativement. Le plan $x = a/2$ devient déficitaire en électrons et se charge alors positivement. Cette polarisation du matériau conduit donc à l'apparition d'un champ électrique \vec{E}_H dirigé suivant $-\vec{u}_x$, appelé <i>champ de Hall</i>, qui à son tour agit sur les électrons de conduction par l'intermédiaire de la force électrique $-e\vec{E}_H$.</p>	2
II.1.b)	<p>L'existence de \vec{E}_H permet de rendre compte de l'apparition, entre les faces Σ_1 d'équation $x = -a/2$ et Σ_2 d'équation $x = a/2$, d'une <i>tension de Hall</i> :</p> $V_H = V_{\Sigma_2} - V_{\Sigma_1} = V(x=a/2) - V(x=-a/2)$	1
II.1.c)	<p style="text-align: center;">Régime permanent</p>	1.5
II.2.a)	<p>En régime permanent $\vec{F}_m - e\vec{E}_H = \vec{0}$</p> $\vec{E}_H = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -R_H \vec{j} \wedge \vec{B} = R_H j B \vec{u}_x$	2
II.2.b)	<p>Au voisinage de Σ_1 : $\vec{E}_H = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow \sigma_1 = R_H j B \epsilon_0 < 0$</p> <p>Au voisinage de Σ_2 : $\vec{E}_H = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow \sigma_2 = -R_H j B \epsilon_0$</p>	1 1
II.2.c)	$V_H = V_{\Sigma_2} - V_{\Sigma_1} = - \int_{-a/2}^{a/2} \vec{E}_H \cdot d\vec{x} = - \int_{-a/2}^{a/2} R_H j B dx = -R_H j B a$ $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} = j a b \Rightarrow V_H = -\frac{B R_H I}{b}$	2
II.3)	<p>En régime permanent le champ total ressenti par un électron est $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{E}_H$. Les lignes de champ de \vec{E} font avec celles associées au courant de conduction un angle θ tel que</p> $\text{tg} \theta = \frac{\ \vec{E}_H\ }{\ \vec{E}_0\ } = \frac{\ \vec{E}_H\ }{\ \vec{j} / \gamma\ } = \gamma B R_H $ <p>A.N $\text{tg} \theta = 5.4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \theta = 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ rad soit } \theta \approx 0.31^\circ$</p> <p>Sous l'action de \vec{B} les lignes de champ électrique sont faiblement modifiées et sont quasiment parallèles à celles associées au champ de conduction.</p>	1 0.5 2

II.4.a)	Pour le conducteur métallique : $V_H = 0.89 \mu\text{V}$ Pour le semi-conducteur : $V_H = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ V}$	1 1
II.4.b)	On utilise un semi-conducteur car sa ddp est plus importante et par conséquent l'erreur de mesure serait acceptable. Pour le conducteur métallique l'erreur serait du même ordre de grandeur que la ddp elle-même.	1.5
II.4.c)	Comme V_H est inversement proportionnelle à l'épaisseur b de la plaque, on a donc intérêt à choisir l'épaisseur la plus faible possible. Soit $b = 0,1 \text{ mm}$.	1
	B- PRESSION DE RADIATION	
1)	$\vec{B}_i(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_i(M,t)}{\omega} = \frac{k}{\omega} \underline{E}_i(M,t) \vec{u}_x$ $\vec{B}_i(M,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(ky - \omega t)} \vec{u}_x$	0.5
2.a)	$\overline{\text{rot} \vec{B}_i(M,t)} = \mu_0 \left[\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i(M,t)}{\partial t} \right]$ $\Rightarrow \vec{j} = - \left[\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_i}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} \right] \vec{u}_z$	1.5
2.b)	$\text{div} \vec{E}_i(M,t) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ or } \text{div} \vec{E}_i(M,t) = 0 \Rightarrow \rho = 0$	1
3.a)	$d\vec{F}(M,t) = \rho d\tau \vec{E}_i(M,t) + \vec{j}(M,t) d\tau \wedge \vec{B}_i(M,t)$ $\vec{f}(M,t) = \frac{d^3 \vec{F}(M,t)}{d\tau} = \rho \vec{E}_i(M,t) + \vec{j}(M,t) \wedge \vec{B}_i(M,t)$ Or $\rho = 0 \Rightarrow \vec{f}(M,t) = j(M,t) B_i(M,t) \vec{u}_y$ $\vec{f}(M,t) = - \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_i(y,t)}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E_i(y,t)}{\partial t} \right) B_i(y,t) \vec{u}_y$ $\vec{f}(M,t) = - \left(\frac{1}{\mu_0} B_i(y,t) \frac{\partial B_i(y,t)}{\partial y} + \varepsilon_0 B_i(y,t) \frac{\partial E_i(y,t)}{\partial t} \right) \vec{u}_y$	2
3.b)	MF : $\overline{\text{rot} \vec{E}_i(M,t)} = - \frac{\partial \vec{B}_i(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_i}{\partial y} = - \frac{\partial B_i}{\partial t}$ $\frac{\partial(E_i B_i)}{\partial t} = E_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + B_i \frac{\partial E_i}{\partial t} = -E_i \frac{\partial E_i}{\partial y} + B_i \frac{\partial E_i}{\partial t}$ $B_i \frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{\partial(E_i B_i)}{\partial t} + E_i \frac{\partial E_i}{\partial y} = \frac{\partial(E_i B_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_i^2}{2} \right)$	

	<p>or $\left\langle \frac{\partial(E_i, B_i)}{\partial t} \right\rangle = 0$, d'où :</p> $\langle \vec{f} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{\mu_0} B_i(y, t) \frac{\partial B_i(y, t)}{\partial y} + \epsilon_0 E_i(y, t) \frac{\partial E_i(y, t)}{\partial y} \right] dt \vec{u}_y$	3
3.c)	$\langle \vec{f} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_i^2(y, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(y, t) \right) dt \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = - \left\langle \int_0^{l_x} \int_0^{l_z} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_i^2(y, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(y, t) \right) dy dx dz \right\rangle \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = \left\langle \int_0^{l_x} \int_0^{l_z} \left(\frac{B_i^2(0, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(0, t) \right) dx dz \right\rangle \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = \left\langle \left(\frac{B_i^2(0, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(0, t) \right) \right\rangle l_x l_z \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = \langle u_{em} \rangle l_x l_z \vec{u}_y$	2 0.5
3.d)	$\langle \vec{F}_R \rangle = P_R l_x l_z \vec{u}_y = P_R dS \vec{u}_y \Rightarrow P_R = \left\langle \left(\frac{B_i^2(0, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(0, t) \right) \right\rangle$	1
4)	<p>L'ARQS étant valable, le vecteur de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i(M, t)}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j}(M, t)$. L'équation de M-A implique : $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_i}{\partial y} \vec{u}_z$. D'après (3.a), l'expression de la force de radiation se réduit à :</p> $\langle \vec{F}_R \rangle = \frac{\langle B_i^2(0, t) \rangle}{2\mu_0} l_x l_z \vec{u}_y$	2
5.a)	<p><u>L'existence de l'onde réfléchie</u></p> <p>Comme \vec{E}_i est perpendiculaire à \vec{k}_i (\vec{E}_i est transverse), le champ \vec{E}_i possède donc une composante tangentielle non nulle. Ce résultat est en contradiction avec la condition aux limites traduisant la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} à la traversée d'une surface chargée. En effet, le champ \vec{E} au sein d'un conducteur parfait est nul.</p> <p>Il ne peut y avoir seulement une onde incidente dans le demi espace $y < 0$, il doit donc y avoir une autre onde \vec{E}_r se propageant dans le même milieu que l'onde incidente : c'est l'onde réfléchie.</p> <p><u>L'origine physique de l'onde réfléchie</u></p> <p>En tombant sur la surface du conducteur, l'onde incidente (\vec{E}_i, \vec{B}_i) interagit avec les électrons libres de celle ci. Ces électrons accélérés vont émettre un rayonnement : c'est l'onde réfléchie.</p> <p>\vec{E}_i met en mouvement les électrons $\rightarrow \vec{j}(t) \rightarrow \vec{B}(t) \rightarrow \vec{E}(t)$.</p>	1.5 1.5

5.b)	$\underline{\bar{E}}_r(M,t) = -E_0 e^{-i(ky+\omega t)} \underline{\bar{u}}_z$ $\underline{\bar{B}}_r(M,t) = \frac{E_0}{c} e^{-i(ky+\omega t)} \underline{\bar{u}}_x$ $\underline{\bar{E}}(M,t) = \underline{\bar{E}}_i(M,t) + \underline{\bar{E}}_r(M,t) \Rightarrow \underline{\bar{E}}(M,t) = 2iE_0 \sin(ky) e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_z$ $\underline{\bar{B}}(M,t) = \underline{\bar{B}}_i(M,t) + \underline{\bar{B}}_r(M,t) \Rightarrow \underline{\bar{B}}(M,t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(ky) e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_x$ <p>L'onde résultante est une onde stationnaire.</p>	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
5.c)	<p>Le vecteur densité de courant au sein du conducteur est volumique et par conséquent le champ magnétique est continu à la surface de ce dernier ($y=0$) :</p> $\Rightarrow \underline{\bar{B}}(y=0^+,t) = \underline{\bar{B}}(y=0^-,t), \Rightarrow \underline{\bar{B}}_i(0,t) = \underline{\bar{B}}(y=0^-,t) = \underline{\bar{B}}(y=0^+,t)$ $\langle \underline{\bar{F}}_R \rangle = \frac{4E_0^2}{2\mu_0 c^2} \langle \cos^2 \omega t \rangle \underline{\bar{u}}_y = \varepsilon_0 E_0^2 \ell_x \ell_z \underline{\bar{u}}_y$ $\langle P \rangle = \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_z} \langle \frac{\underline{\bar{E}}_i \wedge \underline{\bar{B}}_i}{\mu_0} \rangle dx dz \underline{\bar{u}}_y = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \ell_x \ell_z \Rightarrow \langle \underline{\bar{F}}_R \rangle = \frac{2 \langle P \rangle}{c} \underline{\bar{u}}_y$	2.5 2.5
1)	<p>C- RAYONNEMENT DIPOLAIRE</p> <p>$\ \underline{\bar{s}}\ \ll \lambda$: approximation non relativiste</p> <p>$\ \underline{\bar{s}}\ \ll \lambda$: approximation dipolaire</p> <p>$\lambda \ll \lambda$: zone de rayonnement</p>	0.5 0.5 0.5
2.a)	$\frac{\ \underline{\bar{F}}_m\ }{\ \underline{\bar{F}}_e\ } = \frac{\ \underline{\bar{v}} \wedge \underline{\bar{B}}\ }{\ \underline{\bar{E}}\ } = \frac{v B}{E}$ <p>Pour une onde plane, $\ \underline{\bar{E}}\ = c \ \underline{\bar{B}}\ \Rightarrow \frac{\ \underline{\bar{F}}_m\ }{\ \underline{\bar{F}}_e\ } = \frac{v}{c} \ll 1$.</p>	1
2.b)	$m \frac{d^2 \underline{\bar{s}}}{dt^2} = -e \underline{\bar{E}} - m \omega_0^2 \underline{\bar{s}} \quad (1)$	1
2.c)	<p>En régime forcé, l'expression du déplacement $\underline{\bar{s}}$ de l'électron par rapport à sa position d'équilibre est donnée par : $\underline{\bar{s}}(t) = s_0 e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_z$. La projection de (1) sur Oz donne :</p> $-m \omega^2 s_0 = -m \omega_0^2 s_0 - e E_0 \Rightarrow s_0 = \frac{e E_0}{m (\omega^2 - \omega_0^2)} \approx -\frac{e E_0}{m \omega_0^2}$ $\underline{\bar{s}}(t) \approx -\frac{e E_0}{m \omega_0^2} e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_z$	1.5
2.d)	<p>Le moment dipolaire $\underline{\bar{p}}(t) = -e \underline{\bar{s}}(t)$</p> $\Rightarrow \underline{\bar{p}}(t) \approx \frac{e^2 E_0}{m \omega_0^2} e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_z$	1

I.1.b)	$\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dy} \vec{u}_y = \lambda \frac{T_1 - T_2}{b} \vec{u}_y$ <p>Ainsi: $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{b} S \lambda$</p>	0.5										
2.a)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center;">Loi de Fourier</th> <th style="width: 50%; text-align: center;">Loi d'Ohm</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">$\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{grad} T$</td> <td style="text-align: center;">$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{grad} V$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">la conductivité thermique λ</td> <td style="text-align: center;">la conductivité électrique γ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">la température T</td> <td style="text-align: center;">le potentiel électrique V</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">la puissance thermique P</td> <td style="text-align: center;">l'intensité du courant I</td> </tr> </tbody> </table>	Loi de Fourier	Loi d'Ohm	$\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{grad} T$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{grad} V$	la conductivité thermique λ	la conductivité électrique γ	la température T	le potentiel électrique V	la puissance thermique P	l'intensité du courant I	2
Loi de Fourier	Loi d'Ohm											
$\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{grad} T$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{grad} V$											
la conductivité thermique λ	la conductivité électrique γ											
la température T	le potentiel électrique V											
la puissance thermique P	l'intensité du courant I											
2.b)	<p>Ainsi la résistance thermique est définie par :</p> $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} \Rightarrow R_{th} = \frac{b}{\lambda S}$	1										
II) Approximation d'un milieu continu												
1.a)	<p>En régime permanent, le flux thermique traversant les plaques suivant l'axe Oy est le même donc la résistance thermique d'une épaisseur e du matériau, de surface S, constituée d'un empilement de N éléments P_1P_2 est équivalente à une association en série de résistances.</p>	0.5										
1.b)	<p>La résistance thermique équivalente est la somme des résistances des N plaques constituant l'empilement :</p> $R'_{th} = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{\lambda_i S} = \frac{N}{S} \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right) = \frac{N}{S} \frac{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}{\lambda_1 \lambda_2}$ <p>L'empilement est équivalent à un matériau homogène de section S, d'épaisseur $L = N(e_1 + e_2)$, de conductivité thermique équivalente λ_e et de résistance thermique R_{th} telle que :</p> $R'_{th} = \frac{L}{\lambda_e S} = \frac{N}{S} \frac{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}{\lambda_1 \lambda_2} \Rightarrow \frac{L}{\lambda_e} = N \frac{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}{\lambda_1 \lambda_2}$ $\Rightarrow \lambda_e = \frac{L}{N} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$ <p>or $L = N(e_1 + e_2) \Rightarrow \lambda_e = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e_1 + e_2)}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$</p>	1.5 1 0.5										
1.c)	<p>Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $\lambda_e = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e_1 + e_2)}{\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2} = \lambda_1 = \lambda_2$</p> <p>Résultat cohérent puisque si $\lambda_1 = \lambda_2$, on forme un matériau homogène. L'expression de R_{th} donnée dans 1.b) est tout à fait pertinente.</p>	1										

2.a)	<p>Bilan thermique en tenant compte, en plus du transfert thermique par conduction, de celui par convection :</p> <p>Pour une tranche du matériau comprise entre y et $y+dy$, on a :</p> $[\Phi(y) - \Phi(y+dy)] dt = mc dT$ $[j_{th}(y) - j_{th}(y+dy)] \ell a dt - 2h(a+\ell)(T - T_a) dy dt = \rho c \ell a \frac{\partial T}{\partial t} dt dy$ $-\frac{\partial j_{th}}{\partial y} a \ell - 2h(a+\ell)(T - T_a) = \rho c a \ell \frac{\partial T}{\partial t}$ $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell} (T - T_a) = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}}$	3
2.b)	<p>En régime permanent, la température T en un point du matériau vérifie l'équation:</p> $\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell} (T - T_a) = 0$ <p>On pose $\theta(y) = T(y) - T_a$ et $k^2 = \frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell}$, on obtient alors :</p> $\frac{d^2 \theta(y)}{dy^2} - k^2 \theta(y) = 0$ <p>dont la solution est de la forme :</p> $\theta(y) = T(y) - T_a = A e^{ky} + B e^{-ky}$ <p>en $y = \frac{L}{2}$, on a $T = T_0 \Rightarrow T_0 - T_a = A e^{kL/2} + B e^{-kL/2}$</p> <p>en $y = -\frac{L}{2}$, on a $T = T_0 \Rightarrow T_0 - T_a = A e^{-kL/2} + B e^{kL/2}$</p> $\Rightarrow (A - B) e^{kL/2} + (B - A) e^{-kL/2} = 0 \Rightarrow (A - B) (e^{kL/2} - e^{-kL/2}) = 0$ $\Rightarrow 2(A - B) \operatorname{sh}(kL/2) = 0 \Rightarrow A = B.$ $\Rightarrow T_0 - T_a = A (e^{kL/2} + e^{-kL/2}) = 2A \operatorname{ch}(kL/2)$ $\Rightarrow T_0 - T_a = A (e^{kL/2} + e^{-kL/2}) = 2A \operatorname{ch}(kL/2) \Rightarrow A = \frac{T_0 - T_a}{2 \operatorname{ch}(kL/2)}$ <p>D'où : $T_0 - T_a = A (e^{ky} + e^{-ky}) = 2A \operatorname{ch}(y)$</p> $\boxed{T(y) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{\operatorname{ch}(ky)}{\operatorname{ch}(kL/2)}}$ <p>avec $k = \sqrt{\frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell}}$.</p>	3.5