

Corrigé de l'épreuve de physique  
Concours Mathématiques et Physique  
Session Juin 2012

**Problème I (45/100)**  
**PINCES AMPEREMETRIQUES**

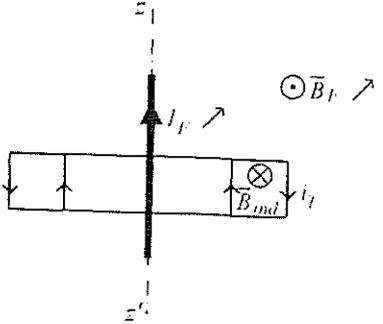
**1<sup>ère</sup> partie : Pince ampèremétrique pour le courant continu (22,5/100)**

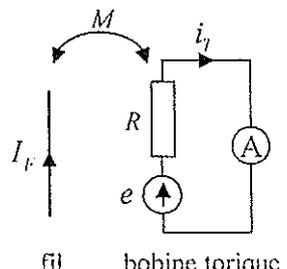
Q	Réponse	Barème
1-a)	$\vec{j} = n q \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{j}{n e} \vec{u}_x$	1
1-b)	$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{j}{n} \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z = -\frac{j B}{n} \vec{u}_y$	1
	Cette force fait dévier les électrons libres de leur trajectoire rectiligne ce qui entraîne une accumulation des électrons sur la face 2 qui devient chargée négativement par contre un déficit d'électrons apparaît sur la face 1 qui devient chargée positivement.	1
1-c)	$\vec{E}_H$ est dirigé de la face 1 vers la face 2 donc il est porté selon $(-\vec{u}_y)$	0,5
1-d)	Lorsque le régime permanent s'établit on a : $q \vec{E}_H = -\vec{f}_m \Rightarrow \vec{E}_H = -\frac{j B}{n e} \vec{u}_y$	1
2-	$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}_H \\ \vec{E}_H &= -\frac{j B}{n e} \vec{u}_y \\ \vec{j} &= \gamma \vec{E}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{E}_H = \frac{j}{\gamma} \vec{u}_x - \frac{j B}{n e} \vec{u}_y$	2
3-a)	$\left. \begin{aligned} U_H &= V_M - V_N = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_M^N \vec{E}_H \cdot dy \vec{u}_y = \int_{\ell/2}^{-\ell/2} -\frac{j B}{n e} \vec{u}_y \cdot dy \vec{u}_y = \frac{j B \ell}{n e} \\ I_0 &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dy = j h \ell \\ U_H &= \frac{I_0 B}{n e h} = -R_H \frac{I_0 B}{h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	1 1 1
	$U_H$ est appelé tension de Hall.	0,5
3-b)	Pour le Cu on a : $R_H = -\frac{1}{10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = -6,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$	1
	Pour le InSb on a : $R_H = -\frac{1}{10^{21} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = -6,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$	1
	Entre deux plaques, l'une constituée de Cu et l'autre de InSb, ayant les mêmes dimensions, parcourues par le même courant $I_0$ et soumises au même champ magnétique extérieur $\vec{B}$ . On choisit celle constituée de InSb car $R_H$ est beaucoup plus important d'où la tension de Hall mesurée sera plus importante.	1
3-c)	$U = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_M^N \left( \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{E}_H \right) \cdot d\vec{\ell} = \int_x^{x+\delta} \frac{j}{\gamma} \cdot dx \vec{u}_x + \int_M^N \vec{E}_H \cdot dy \vec{u}_y = \frac{j \delta}{\gamma} + U_H \Rightarrow$ $\Delta U_H = \frac{j \delta}{\gamma} = \frac{I_0 \delta}{h \ell \gamma} \Rightarrow \delta = \frac{\Delta U_H h \ell \gamma}{I_0}$	2

	$\delta = \frac{10^{-2} \cdot 0.3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^3}{10^{-1}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,2 \text{ mm}$	1
3-d)	$U_H = \frac{I_0 B e^{-a\theta}}{n(0) e h} \Rightarrow \frac{dU_H}{d\theta} = \frac{-a I_0 B e^{-a\theta}}{n(0) e h} = -a U_H \Rightarrow \frac{\Delta U_H}{U_H} = a \Delta\theta$ $\frac{\Delta U_H}{U_H} = 0,014 \cdot 10 = 0,14$	1,5  1
	L'effet de la température est important sur l'incertitude de la mesure.	0,5
4-a)	$U_H = \frac{\mu_0 I_0}{n e h^2} I$	1
	$U_H$ est proportionnel à $I$ donc une mesure de la tension $U_H$ permet de déterminer l'intensité $I$ du courant inconnu : on a un capteur linéaire du courant électrique.	1
4-b)	$U_H = \frac{\mu_0 I_0}{n e h^2} I = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-1} \cdot 10^3}{10^{21} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (0,3)^2 \cdot 10^{-6}} = 8,7 \text{ V}$	1
4-c)	$s = \frac{\Delta U_H}{\Delta I} = \frac{\mu_0 I_0}{n e h^2}$ d'où pour augmenter la sensibilité de la pince il faut diminuer $h$ ou augmenter $I_0$ .	0,5

2<sup>ème</sup> partie : Pince ampèremétrique pour le courant alternatif (22,5/100)

Q	Réponse	Barème
1-	Dans le cadre de l'ARQS les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \frac{Q_{int\Sigma}}{\epsilon_0} : \text{théorème de Gauss}$ $\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 : \text{équation de conservation du flux magnétique}$ $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} : \text{Loi de Faraday}$ $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{entace \Gamma} : \text{théorème d'Ampère}$	0,75  0,75  0,75  0,75
2-a)	La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe $Oz$ donc $B_r$ est indépendant de $\theta$ . Soit $M$ un point quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie donc $\vec{B}_r(M, t) \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \Rightarrow \vec{B}_r(M, t) = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$	1
2-b)	Appliquons le théorème d'Ampère. On choisit $\Gamma$ un cercle orientée d'axe $Oz$ et de rayon $r$ . $\oint_{\Gamma} \vec{B}_r \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r, z, t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = 2 \pi r B(r, z, t)$ $\left. \begin{array}{l} \text{Si } r > b \text{ et } 0 < z < h \text{ alors } I_{entace \Gamma} = N I_l - N I_r = 0 \\ \text{Si } z < 0 \text{ ou } z > h \text{ et } \forall r \text{ alors } I_{entace \Gamma} = 0 \\ \text{Si } r < a \text{ et } 0 < z < h \text{ alors } I_{entace \Gamma} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{ext} = \vec{0}$ $\text{Si } a < r < b \text{ avec } 0 < z < h \text{ alors } I_{entace \Gamma} = N I_l \Rightarrow \vec{B}_r(M, t) = \frac{\mu_0 N I_l}{2 \pi} \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$	1  1

2-c)	$\Phi = \iint_{\text{bobinage}} \vec{B}_I \cdot \vec{dS}_I$ <p>Les spires sont identiques et parcourues par le même courant donc <math>\Phi = N \iint_{\text{spire}} \vec{B}_I \cdot \vec{dS}_{\text{spire}} \Rightarrow</math></p> $\Phi = N \frac{\mu_0 N I_1}{2 \pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^h dz = \frac{\mu_0 N^2 I_1}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$ $\Phi = L I_1 \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$	0,5  1  0,5
2-d)	$E = \iiint_{\text{espace}} \frac{B_I^2}{2 \mu_0} d\tau = \frac{\mu_0 N^2 I_1^2}{8 \pi^2} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{\mu_0 N^2 I_1^2}{4 \pi} h \ln \frac{b}{a}$ $E = \frac{1}{2} L I_1^2 \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$	1  0,5
2-e)	$\Phi_{\text{tore} \rightarrow \text{fil}} = \iint_{\text{fil}} \vec{B}_I \cdot \vec{dS}_{\text{fil}}$ <p>puisque le fil se ferme à l'infini et <math>\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}</math> alors</p> $\Phi_{\text{tore} \rightarrow \text{fil}} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_I \cdot \vec{dS}_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N I_1}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$ $\Phi_{\text{tore} \rightarrow \text{fil}} = M_{\text{tore} \rightarrow \text{fil}} I_1 \Rightarrow M_{\text{tore} \rightarrow \text{fil}} = \frac{\mu_0 N}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$	1
3-a)	<p>La distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz. Le fil étant infini donc la distribution de courant est invariante par translation le long de Oz donc <math>B_I</math> ne dépend que de <math>r</math>.</p> <p>Soit M un point quelconque de l'espace, le plan <math>(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)</math> est un plan de symétrie donc <math>\vec{B}_I(M, t) \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \Rightarrow \vec{B}_I(M, t) = B(r, t) \vec{u}_\theta</math></p> <p>Appliquons le théorème d'Ampère. On choisit <math>\Gamma</math> un cercle d'axe Oz et de rayon <math>r</math>.</p> $\oint_{\Gamma} \vec{B}_I \cdot \vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} B(r, t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = 2 \pi r B(r, t)$ $I_{\text{entree } \Gamma} = I_1 \Rightarrow \vec{B}_I = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi r} \vec{u}_\theta$	1  1
3-b)	$\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = \iint_{\text{tore}} \vec{B}_I \cdot \vec{dS}_I$ <p>Les spires sont identiques, chacune est contenue dans un plan radial et elles sont équidistantes au fil donc <math>\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = N \iint_{\text{spire}} \vec{B}_I \cdot \vec{dS}_{\text{spire}}</math></p> $\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = N \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^h dz = \frac{\mu_0 N I_1}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$ $\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = M_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} I_1 \Rightarrow M_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = \frac{\mu_0 N}{2 \pi} h \ln \frac{b}{a}$ $M_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = M_{\text{tore} \rightarrow \text{fil}}$	0,5  1
3-c)	<p>Le bobinage torique est un conducteur immobile dans un champ magnétique variable <math>\vec{B}_I(M, t)</math> donc il subit l'induction de Newman. Puisque les deux extrémités du bobinage torique sont reliées entre elles donc un courant induit <math>i_I(t)</math> apparaît.</p>	0,5  0,5
		1

	Lorsque le courant $I_f(t)$ croît alors en un point M d'une spire $\vec{B}_f$ croît donc $\Phi_{fil \rightarrow tore}$ croît. D'après la loi de Lenz le sens du courant induit doit être tel que par ses effets il s'oppose à l'augmentation du flux donc ce courant induit crée un champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$ dont le sens doit être opposé à celui de $\vec{B}_f$ . Connaissant le sens de $\vec{B}_{ind}$ à l'intérieur d'une spire on déduit le sens du courant induit $i_T(t)$ en utilisant la règle du tire bouchon.	1	
4-a)	Le schéma électrique équivalent du dispositif est : $M_{fil \rightarrow tore} = M_{tore \rightarrow fil} = M$		1
	Appliquons la loi des mailles sur le bobinage torique : $e - R i_T = 0$ avec $e = -\frac{d\Phi_{total}}{dt} = -\frac{d\Phi_{tore \rightarrow tore}}{dt} - \frac{d\Phi_{fil \rightarrow tore}}{dt} = -L \frac{di_T}{dt} - M \frac{dI_f}{dt}$ ; c'est la f.e.m induite qui apparaît entre les bornes du bobinage torique donc		
	$L \frac{di_T}{dt} + M \frac{dI_f}{dt} + R i_T = 0$	1,5	
	En notation complexe on a : $(R + j L \omega) \underline{i}_T + j M \omega \underline{I}_f = 0 \Rightarrow$ $\underline{i}_T = \frac{-j M \omega}{R + j L \omega} \underline{I}_f = -\frac{M}{L} \underline{I}_f = -\frac{I_f}{N} \Rightarrow i_{Teff} = \frac{I_0}{N}$	1	
	La mesure de $i_{Teff}$ permet de déterminer la valeur efficace $I_0$ du courant inconnu qui traverse le fil. Le dispositif est un capteur de courant. $N$ étant élevé alors cette pince permet la mesure des courants de forte intensité.	0,5	
4-b)	$i_T = 0$ d'où la tension aux bornes de la bobine torique est : $u(t) = M \frac{dI_f}{dt}$ d'où la tension efficace indiquée par le voltmètre est : $u_{eff} = M I_0 \omega$	1	
	Connaissant $M$ et $\omega$ on peut par simple mesure de la tension $u_{eff}$ déterminer la valeur efficace $I_0$ du courant inconnu qui traverse le fil. Le dispositif est un capteur de courant. $M$ étant proportionnel à $N$ alors cette pince permet la mesure des courants de faible intensité.	0,5	

**Problème II (55/100)**  
**TEMPERATURE DE LA TERRE**

**1<sup>ère</sup> partie : Température à l'intérieur de la Terre (25/100)**

1-	Les volcans, les geysers, les sources chaudes naturelles sont des exemples qui prouvent que la température à l'intérieur de la Terre est plus élevée que celle à sa surface.	0,5
	Si la température de la Terre était due au rayonnement solaire alors elle serait plus faible qu'en sa surface.	0,5
2-a)	$\delta Q = \vec{j}_th \cdot d\vec{S} dt$	0,5
2-b)	$\vec{j}_th = -\lambda \overline{grad} T$	0,5
	Le signe moins traduit le fait que les transferts thermiques par conduction se font des régions de hautes températures aux régions de basses températures.	0,5

2-c)	<p><math>\delta Q_c</math> le transfert thermique entrant dans la sphère de rayon <math>r</math> entre les instants <math>t</math> et <math>t + dt</math> est : <math>\delta Q_c = j_{th}(r) r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi dt = 4 \pi r^2 j_{th}(r) dt</math></p> <p><math>\delta Q_s</math> le transfert thermique sortant dans la sphère de rayon <math>r + dr</math> entre les instants <math>t</math> et <math>t + dt</math> est :</p> <p><math>\delta Q_s = j_{th}(r + dr) (r + dr)^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi dt = 4 \pi (r + dr)^2 j_{th}(r + dr) dt</math></p>	1
2-d)	<p>La Terre est indéformable <math>\Rightarrow \delta W = 0</math>, le régime est stationnaire <math>\Rightarrow dU = 0</math> d'où le premier principe s'écrit :</p> <p><math>dU = \delta Q_c - \delta Q_s = 0 \Rightarrow (r + dr)^2 j_{th}(r + dr) - r^2 j_{th}(r) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(r^2 j_{th}(r)) = 0</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{d}{dr}(r^2 j_{th}(r)) = 0 \left. \vphantom{\frac{d}{dr}(r^2 j_{th}(r)) = 0}} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0</math></p> <p><math>j_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}</math></p>	0,5 1 1,5
2-e)	<p><math>r^2 \frac{dT}{dr} = C^{te} = A \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{A}{r} + B</math></p> <p><math>T(r)</math> ne doit pas diverger en <math>r = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow T(r) = C^{te} = T(r = R_T) = T_s</math></p> <p>Ce modèle n'est pas satisfaisant car la température à l'intérieur de la Terre n'est pas uniforme.</p>	1 1 0,5
3-a)	<p><math>\delta Q_c</math> le transfert thermique entrant dans la sphère de rayon <math>r</math> entre les instants <math>t</math> et <math>t + dt</math> est : <math>\delta Q_c = 4 \pi r^2 j_{th}(r) dt</math></p> <p><math>\delta Q_s</math> le transfert thermique sortant dans la sphère de rayon <math>r + dr</math> entre les instants <math>t</math> et <math>t + dt</math> est : <math>\delta Q_s = 4 \pi (r + dr)^2 j_{th}(r + dr) dt</math></p> <p><math>\delta Q_{int}</math> le transfert thermique créée à l'intérieur de l'enveloppe sphérique comprise entre les sphères de rayon <math>r</math> et <math>r + dr</math> entre les instants <math>t</math> et <math>t + dt</math> est :</p> <p><math>\delta Q_{int} = p_v r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi dt = 4 \pi r^2 p_v dr dt</math></p> <p>Le régime étant permanent et la Terre indéformable le premier principe s'écrit :</p> <p><math>dU = \delta Q_c - \delta Q_s + \delta Q_{int} = 0 \Rightarrow</math></p> <p><math>4 \pi r^2 j_{th}(r) dt - 4 \pi (r + dr)^2 j_{th}(r + dr) dt + 4 \pi p_v r^2 dr dt = 0 \Rightarrow</math></p> <p><math>-\frac{d}{dr}(r^2 j_{th}(r)) + p_v r^2 = 0 \left. \vphantom{-\frac{d}{dr}(r^2 j_{th}(r)) + p_v r^2 = 0}} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{p_v}{\lambda} r^2</math></p> <p><math>j_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}</math></p>	0,5 0,5 1 0,5 1,5
3-b)	<p>La continuité de la puissance thermique en <math>r = R_l</math> s'écrit :</p> <p><math>j_{th}(r = R_l^+) = j_{th}(r = R_l^-)</math></p> <p><math>T(r &lt; R_l) = C^{te} \Rightarrow j_{th}(r = R_l^-) = -\lambda \left(\frac{dT(r &lt; R_l)}{dr}\right)_{r=R_l^-} = 0 \left. \vphantom{T(r &lt; R_l) = C^{te} \Rightarrow j_{th}(r = R_l^-) = -\lambda \left(\frac{dT(r &lt; R_l)}{dr}\right)_{r=R_l^-} = 0}} \right\} \Rightarrow j_{th}(r = R_l) = 0</math></p>	1
3-c)	<p><math>\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{p_v}{\lambda} r^2 \Rightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{p_v}{\lambda} \frac{r^3}{3} + C \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{p_v}{3\lambda} r + \frac{C}{r^2} \Rightarrow</math></p> <p><math>T(r) = -\frac{p_v}{6\lambda} r^2 - \frac{C}{r} + D</math></p>	2

	$j_{th}(r = R_l) = 0 \Rightarrow \left( \frac{dT}{dr} \right)_{r=R_l} = 0 \Rightarrow -\frac{p_v}{3\lambda} R_l + \frac{C}{R_l^2} = 0 \Rightarrow C = \frac{p_v}{3\lambda} R_l^3$	1
	<p>Continuité de la température en <math>r = R_f \Rightarrow T(r = R_f) = T_s \Rightarrow</math></p> $T_s = -\frac{p_v}{6\lambda} R_f^2 - \frac{C}{R_f} + D \Rightarrow D = T_s + \frac{p_v}{6\lambda} R_f^2 + \frac{p_v}{3\lambda} \frac{R_l^3}{R_f}$	1
	<p>donc <math>T(r) = T_s + \frac{p_v}{6\lambda} (R_f^2 - r^2) + \frac{p_v}{3\lambda} R_l^3 \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{r} \right)</math></p>	1
	$T(r = 0) = T(r = R_l) = T_s + \frac{p_v}{6\lambda} \left( R_f^2 - 3R_l^2 + \frac{2R_l^3}{R_f} \right)$	1
	$T(r = 0) = 290 + \frac{14 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 4} \left( (6400)^2 - 3 \cdot (6320)^2 + \frac{2 \cdot (6320)^3}{(6400)} \right) 10^6 = 1400 \text{ K}$	1
3-d)	<p>The graph shows a plot of temperature <math>T(r)</math> on the vertical axis against radius <math>r</math> on the horizontal axis. The vertical axis has markings for <math>0</math> and <math>T_s</math>. The horizontal axis has markings for <math>R_l</math> and <math>R_f</math>. The temperature profile is constant at <math>T_s</math> for <math>0 \leq r \leq R_l</math>, and then decreases linearly from <math>T_s</math> at <math>r = R_l</math> to <math>0</math> at <math>r = R_f</math>.</p>	1
3-e)	$\left( \overline{\text{grad } T} \right)_{r=R_l} = \left( \frac{dT}{dr} \right)_{r=R_l} = \frac{p_v}{3\lambda} \left( \frac{R_l^3}{R_f^2} - R_f \right)$	1
	$\left( \overline{\text{grad } T} \right)_{r=R_l} = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 4} \left( \frac{(6320)^3}{(6400)^2} - 6400 \right) 10^3 = -7,9 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = -7,9 \text{ K km}^{-1}$	1

## 2<sup>ème</sup> partie : Refroidissement de la Terre par conduction (17,5/100)

1-	$\delta Q_c$ le transfert thermique entrant dans le plan de côte $z$ entre les instants $t$ et $t + dt$ est : $\delta Q_c = j_{th}(z, t) S dt$	1
	$\delta Q_s$ le transfert thermique sortant du plan de côte $z + dz$ entre les instants $t$ et $t + dt$ est : $\delta Q_s = j_{th}(z + dz, t) S dt$	1
	<p>La Terre étant indéformable le premier principe s'écrit :</p> $dU = \delta Q_c - \delta Q_s = -\frac{\partial j_{th}}{\partial z} dz S dt \text{ avec } dU = dm c dT = \rho S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt$	1
	<p>donc <math>-\frac{\partial j_{th}}{\partial z} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 j_{th}}{\partial z^2} = -\rho c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)</math></p>	
	<p>La loi de Fourier donne <math>\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{\text{grad } T} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z</math></p>	
	<p>On déduit l'équation différentielle vérifiée par <math>j_{th}</math> : <math>\frac{\partial^2 j_{th}}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial j_{th}}{\partial t}</math></p>	2

2-a)	$j_{th}(z,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ <p>à <math>t=0</math> on a <math>T(z=0^+) = T_0 \gg T(z=0^-) = T_s</math> avec <math>T_0</math> très élevé donc <math>j_{th}(z=0, t=0) \rightarrow -\infty</math></p>	0,5
	<p>lorsque <math>t \rightarrow +\infty</math> on a <math>T(z=0^+) = T_0 = T(z=0^-)</math> donc <math>j_{th}(z=0, t \rightarrow +\infty) = 0</math></p>	0,5
2-b)	<p>à <math>t=0</math> on a <math>T(z) = T_0 \forall z \neq 0</math> donc <math>j_{th}(z, t=0) = 0</math></p>	0,5
	<p>lorsque <math>t \rightarrow +\infty</math> on a <math>T(z) = T_s \forall z</math> donc <math>j_{th}(z, t \rightarrow +\infty) = 0</math></p>	0,5
3-	<p>La solution proposée est acceptable car :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- elle vérifie l'équation différentielle en effet :</li> </ul> $\frac{\partial^2 j_{th}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A}{\sqrt{Dt}} \frac{2z}{4Dt} e^{-z^2/4Dt} \right) = \frac{A}{2(Dt)^{3/2}} e^{-z^2/4Dt} \left( 1 - \frac{z^2}{2Dt} \right)$ $\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial j_{th}}{\partial t} = \frac{1}{D} \frac{\partial j_{th}}{\partial t} = \frac{1}{D} \left[ \frac{A D}{2(Dt)^{3/2}} e^{-z^2/4Dt} - \frac{A}{\sqrt{Dt}} \left( \frac{z^2}{4Dt^2} \right) e^{-z^2/4Dt} \right] \Rightarrow$ $\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial j_{th}}{\partial t} = \frac{A}{2(Dt)^{3/2}} e^{-z^2/4Dt} \left( 1 - \frac{z^2}{2Dt} \right)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- elle vérifie les conditions aux limites en effet :</li> </ul> $\lim_{z \rightarrow 0} j_{th}(z,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \text{ donc si } t \rightarrow 0 \text{ on a } j_{th} \rightarrow -\infty \text{ et si } t \rightarrow +\infty \text{ on a } j_{th} \rightarrow 0$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} j_{th}(z,t) = 0 \text{ donc } \forall z \text{ } j_{th} \rightarrow 0$	1 1 1
4-	$\left. \begin{aligned} [\lambda] &= [j_{th}][L][T]^{-1} \\ [j_{th}] &= [\delta Q][L]^{-2}[t]^{-1} \text{ avec } [\delta Q] = [M][L]^2[t]^{-2} \\ [\rho] &= [M][L]^{-3} \\ [c] &= [dU][M]^{-1}[T]^{-1} \\ [\delta Q] &= [M][L]^2[t]^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\lambda] = [M][L][t]^{-3}[T]^{-1}$ $\left. \begin{aligned} j_{th} &= -\frac{A}{\sqrt{Dt}} e^{-z^2/4Dt} \Rightarrow [A] = [j_{th}][D]^{1/2}[t]^{1/2} = [j_{th}][\lambda]^{1/2}[\rho]^{-1/2}[c]^{-1/2}[t]^{1/2} \\ [j_{th}] &= [\delta Q][L]^{-2}[t]^{-1} \text{ avec } [\delta Q] = [M][L]^2[t]^{-2} \\ [A] &= [M][t]^{-3}[L] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (T_0 - T_s)^\alpha \lambda^\beta \Rightarrow [A] = [T]^\alpha [\lambda]^\beta = [M]^\beta [L]^\beta [t]^{-3\beta} [T]^{\alpha-\beta}$ <p>Par identification on a : <math>\alpha = \beta = 1</math></p>	1 0,5 1 1
5-	$\left( \overline{\text{grad } T} \right)_{z=0} = -\frac{j_{th}(z=0,t)}{\lambda} = \frac{A}{\lambda \sqrt{Dt}} = \frac{(T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi D t}} \Rightarrow t = \frac{1}{\pi D} \frac{(T_0 - T_s)^2}{\left[ \left( \overline{\text{grad } T} \right)_{z=0} \right]^2}$ $t = \frac{1}{\pi \cdot 10^{-6}} \frac{(1500)^2}{(30 \cdot 10^{-3})^2} \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ années}$	2 1
	<p>Lord Kelvin a obtenu un refroidissement trop rapide car il a négligé l'énergie thermique produite par la radioactivité qui retarde le refroidissement de la Terre.</p>	0,5
	<p>L'âge de la Terre étant estimé à 4,5 milliards d'années donc on peut à l'échelle de la vie humaine considérer le régime stationnaire.</p>	0,5

3<sup>ème</sup> partie : Mesure de la température de la Terre (17,5/100)

1-a)	<p>Un amplificateur opérationnel est dit parfait (ou idéal) si :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* les courants de polarisation sont nuls <math>i^+ = i^-</math></li> <li>* La résistance d'entrée est infinie et la résistance de sortie est nulle</li> <li>* le gain différentiel statique est infini</li> </ul> <p>Si un amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire alors les potentiels de ces bornes inverseuse et non inverseuse sont égaux <math>\Rightarrow \varepsilon = V^+ - V^- = 0</math></p>	1
1-b)	A partir de la loi des mailles on obtient : $E - 2 R_0 i_1 + 2 R_0 i_3 = 0 \Rightarrow i_3 = -\frac{E}{2 R_0} + i_1$	1,5
1-c)	Le premier AO étant idéal, on obtient à partir de la loi des mailles : $2 R_0 i_3 - R_0 i_1 + R_0 i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = i_1 - 2 i_3$	1,5
1-d)	A partir de la loi des nœuds on a : $i_0 = i_1 + i_2$ d'où on déduit : $i_0 = i_1 + i_1 + \frac{E}{R_0} - 2 i_1 = \frac{E}{R_0} \Rightarrow K = \frac{1}{R_0}$	2
	Cette partie du montage joue le rôle d'un générateur de courant.	0,5
2-a)	Le deuxième AO étant idéal, on obtient à partir de la loi des mailles : $\left. \begin{aligned} U_s - R_1 i' - U_m = 0 &\Rightarrow i' = \frac{U_s - U_m}{R_1} \\ U_m + (R_1 + R_2) i' - U_p = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_m = U_p - (R_1 + R_2) \frac{U_s - U_m}{R_1} \Rightarrow$ $U_m = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_s - \frac{R_1}{R_2} U_p$	3
2-b)	$U_s = R_s i_0 = E (1 + a \theta) \Rightarrow U_m = \frac{R_1 + R_2}{R_2} E (1 + a \theta) - \frac{R_1}{R_2} U_p$	2
3-	$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} E - \frac{R_1}{R_2} U_p \\ 2,5 &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} E (1 + 100 a) - \frac{R_1}{R_2} U_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2,5 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} 100 E a \Rightarrow$ $E = \frac{2,5 R_2}{(R_1 + R_2) 100 a} \Rightarrow E = \frac{2,5 \cdot 10 \cdot 10^3}{(15 + 10) \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 3,9083 \cdot 10^{-3}} = 2,56 \text{ V}$ $U_p = \frac{R_1 + R_2}{R_1} E \Rightarrow U_p = \frac{(15 + 10) \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} 2,56 = 6,4 \text{ V}$	2
4-	$\theta = \frac{R_2}{E a (R_1 + R_2)} \left( U_m + \frac{R_1}{R_2} U_p \right) - \frac{1}{a}$	1
	$\theta = \frac{10 \cdot 10^3}{2,56 \cdot 3,9083 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^3} \left( 3 + \frac{15}{10} \cdot 6,4 \right) - \frac{1}{3,9083 \cdot 10^{-3}} = 248 \text{ } ^\circ\text{C} = 521 \text{ K}$	1