Corrigé - 2002 1

I-1-Torseurs cinématiques

- $\{\mathcal{V}_{1/0}\}_A = \{\vec{\Omega}_{1/0} \mid \vec{V}_{A/R_0}\}$ avec $\vec{\Omega}_{1/0} = -\dot{\theta}\vec{z}_0$, $\vec{V}_{A/R_0} = \vec{0}$
- $\{\mathcal{V}_{2/0}\}_C = \{\vec{\Omega}_{2/0} \mid \vec{V}_{C/R_0}\}$ avec $\vec{\Omega}_{2/0} = -\dot{\varphi}\vec{z}_0$, $\vec{V}_{C/R_0} = \vec{0}$

I-2 Vitesses de B

2-a. $\vec{V}_{B/R_0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} = -\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge a\vec{y}_1 = a\dot{\theta}\vec{x}_1$

$$\vec{V}_{B/R_0} = a\dot{\theta}(\cos\theta\vec{x}_0 - \sin\theta\vec{y}_0)$$

2-b $\vec{V}_{B/R_0} = \frac{d\vec{CB}}{dt}/_{R_0}$

$$= \dot{\lambda}\vec{x}_2 - \lambda\dot{\varphi}\vec{y}_2 + b\dot{\varphi}\vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{B/R_0} = (\dot{\lambda}+b\dot{\varphi})(\cos\varphi\vec{x}_0 - \sin\varphi\vec{y}_0) - \lambda\dot{\varphi}(\sin\varphi\vec{x}_0 + \cos\varphi\vec{y}_0)$$

$$= [(\dot{\lambda}+b\dot{\varphi})\cos\varphi - \lambda\dot{\varphi}\sin\varphi]\vec{x}_0 - [(\dot{\lambda}+b\dot{\varphi})\sin\varphi + \lambda\dot{\varphi}\cos\varphi]\vec{y}_0$$

3 Relations entre paramètres

$$a\dot{\theta}\cos\theta = (\dot{\lambda}+b\dot{\varphi})\cos\varphi - \lambda\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$a\dot{\theta}\sin\theta = (\dot{\lambda}+b\dot{\varphi})\sin\varphi + \lambda\dot{\varphi}\cos\varphi$$

I-4. $\dot{\lambda}$ en fonction de $\dot{\theta}$.

(1) $\cos\varphi$ + (2) $\sin\varphi \Rightarrow$

$$a\dot{\theta}(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) = \dot{\lambda} + b\dot{\varphi}$$

$$a\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi) = \dot{\lambda} + b\dot{\varphi}$$

(1) $\sin\varphi$ - (2) $\cos\varphi$

$$a\dot{\theta}(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\varphi) = -\lambda\dot{\varphi}$$

$$a\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta) = -\lambda\dot{\varphi}$$

$$a\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi) = \lambda\dot{\varphi}$$

$$a\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi) = \dot{\lambda} + \frac{b}{\lambda}a\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)$$

$$\dot{\lambda} = a\dot{\theta}\left[\cos(\theta-\varphi) - \frac{b}{\lambda}\sin(\theta-\varphi)\right]$$

I-5. Roulement sans glissement en I

$$\vec{V}_{I\in 5/4} = \vec{V}_{I\in 5/2} - \vec{V}_{I\in 4/2} = \vec{0}$$
$$= \dot{\beta}\vec{x}_2 \wedge R_5\vec{y}_2 + \dot{\varphi}\vec{x}_2 \wedge (-R_4\vec{y}_2)$$

$$R_4\dot{\varphi} + R_5\dot{\beta} = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{R_5}{R_4}\dot{\beta}$$

I-6 Torseur cinématique de (3) par rapport à (4) au point D

$$\{\mathcal{V}_{3/4}\}_D = \{\vec{\Omega}_{3/4} \mid \vec{V}_{D\in 3/4}\}$$

$$\vec{\Omega}_{3/4} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/4} = \vec{\Omega}_{2/4} = -\vec{\Omega}_{4/2}$$
$$= -\dot{\varphi}\vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{D\in 3/4} = \vec{V}_{D\in 3/2} + \vec{V}_{D\in 2/4}$$
$$= \vec{V}_{D\in 3/2} - \vec{V}_{D\in 4/2}$$
$$= \dot{\lambda}\vec{x}_2$$

$$\{\mathcal{V}_{3/4}\}_D = \{-\dot{\varphi}\vec{x}_2 \mid \dot{\lambda}\vec{x}_2\}$$

I-7. relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\varphi}$

$$\dot{\lambda} = \frac{P_4}{2\pi}\dot{\varphi} \quad \text{(liaison hélicoïdale)}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{P.R_5}{2\pi R_4}\dot{\beta} \Rightarrow \lambda = -\frac{PR_5}{2\pi R_4}\beta + cte$$

I-8. Loi entrée - sortie.

$$\dot{\lambda} = a\dot{\theta}\left[\cos(\theta-\varphi) - \frac{b}{\lambda}\sin(\theta-\varphi)\right]$$

$$-\frac{P.R_5}{2\pi R_4}\dot{\beta} = a\dot{\theta}\left[\cos(\theta-\varphi) - \frac{b}{\lambda}\sin(\theta-\varphi)\right]$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi R_4}{PR_5}\left[\frac{2b.\pi R_4}{PR_5\beta}\sin(\theta-\varphi) - \cos(\theta-\varphi)\right]$$

II. ENERGETIQUE

II-1. Actions extérieures appliquées à (Σ)

- poids de 1 en G.

$$\vec{P}_1 = -Mg\vec{y}_0 \Rightarrow \{\mathcal{T}_{terre/\Sigma}\} = \begin{Bmatrix} -Mg\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots & 0 \end{Bmatrix}$$

1 (2)

- bâti (0) sur (1)

$$\left\{\mathcal{T}_{0/1}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c|c} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$$

- bâti sur (2)

$$\left\{\mathcal{T}_{0/2}\right\}_C = \left\{\begin{array}{c|c} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

I-2 Actions intérieures

- Moteur sur pignon 5

$$\left\{\mathcal{T}_{M/5}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & C_M \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

- corps de vérin sur moteur

$$\left\{\mathcal{T}_{2/M}\right\}_F = \left\{\begin{array}{c|c} X_{2M} & L_{2M} \\ Y_{2M} & M_{2M} \\ Z_{2M} & N_{2M} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

- corps de vérin sur 5

$$\left\{\mathcal{T}_{2/5}\right\}_F = \left\{\begin{array}{c|c} X_{25} & 0 \\ Y_{25} & M_{25} \\ Z_{25} & N_{25} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

- corps de vérin sur (4)

$$\left\{\mathcal{T}_{2/4}\right\}_H = \left\{\begin{array}{c|c} X_{24} & 0 \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & N_{24} \end{array}\right\}_H \quad (x_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

- corps de vérin sur (3)

$$\left\{\mathcal{T}_{2/3}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

- (4) sur (3)

$$\left\{\mathcal{T}_{4/3}\right\}_D = \left\{\begin{array}{c|c} X_{43} & L_{43} \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

- (4) sur (5) en I

$$\left\{\mathcal{T}_{4/5}\right\}_I = \left\{\begin{array}{c|c} X_{45} & 0 \\ Y_{45} & 0 \\ Z_{45} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

(3) sur (1) au point B

$$\left\{\mathcal{T}_{3/1}\right\}_B = \left\{\begin{array}{c|c} X_{31} & L_{31} \\ Y_{31} & M_{31} \\ Z_{31} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$$

II-3 Puissance développée par les forces extérieures

- $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_{elec} = C_M \dot{\beta}$
- $\mathcal{P}_{R_0}(\text{terre} \to 1) = \vec{P} \cdot \vec{V}_{G/R_0}$

$$\vec{V}_{G/R_0} = -\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge a_G \vec{x}_1 = -a_G\dot{\theta}\vec{y}_1$$

$$= -a_G\dot{\theta}\left[\cos\theta\, \vec{y}_0 + \sin\theta\, \vec{x}_0\right]$$

$$\mathcal{P}_{R_0}(\text{terre} \to 1) = \dot{\theta} M g a_G \sin\alpha \cdot \sin\theta$$

$$\mathcal{P}_{R_0}(\text{terre} \to 1) = M g a_G \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta$$

- $\mathcal{P}_{R_0}(0 \to 1) = \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} \cdot \left\{\mathcal{T}_{0/1}\right\} = 0$

$$\mathcal{P}_{R_0}(0 \to 2) = \left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\} \cdot \left\{\mathcal{T}_{0/2}\right\} = 0$$

II-4 Puissance des forces intérieures

$\mathcal{P}(\text{moteur} \leftrightarrow 5) = C_M \dot{\beta}$

$\mathcal{P}(\text{moteur} \leftrightarrow 2) = 0$

$\mathcal{P}(3 \leftrightarrow 1) = 0$

$$\mathcal{P}(4 \leftrightarrow 3) = \left\{\begin{array}{c|c} X_{43} & L_{43} \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{c|c} -\dot{\psi} & \dot{\lambda} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}$$

$$= -\dot{\psi} L_{43} + \dot{\lambda} X_{43}$$

II-5 Energie cinétique

$$E_{R_0}(1/0) = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} {}^t\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \left[I_G(1)\right] \cdot \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m a_G^2 + C_1\right)\dot{\theta}^2$$

II-6 Théorème de l'energie cinétique

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

$$(m a_G^2 + C_1)\dot{\theta}\ddot{\theta} = M g a_G \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta + C_M \dot{\beta} + \dot{\psi} L_{43} + \dot{\lambda} X_{43}$$

CORRECTION

Partie C : Automatique

Partie C-I : Modélisation

I.1 A partir des équations mécaniques, on déduit :

$$C_m - nC_r = J_e \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_e \omega_m(t)$$

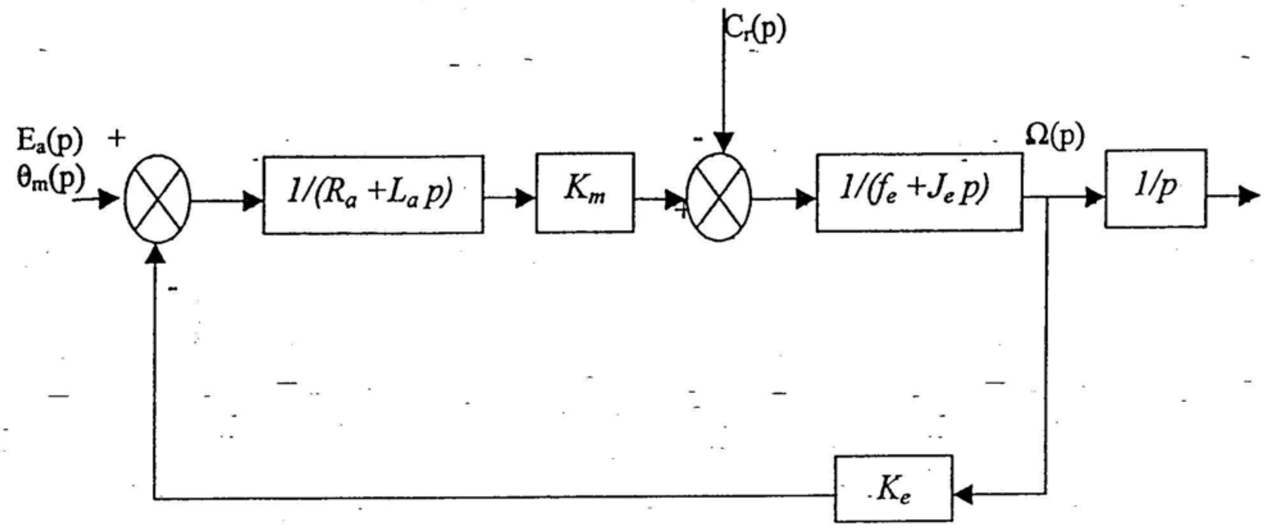
En effet, à partir des équations :

$$\begin{cases} C_m - C_1 = J_m \dfrac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m \\ n = \dfrac{\omega_c}{\omega_m} = \dfrac{C_1}{C_2} \\ C_2 - C_1 = J_c \dfrac{d\omega_c(t)}{dt} + f_c \omega_c \end{cases}$$

on peut écrire :

$$C_m - nC_r = (J_m + n^2 J_c) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (f_m + n^2 f_c)\omega_m$$

I-2. En appliquant la transformée de Laplace aux équations électriques et mécaniques et en considérant que les conditions initiales sont nulles, le schéma fonctionnel du système est :



I. 3 d'où l'expression de $T_1(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{E_a(p)} = \dfrac{k_m}{(R_a + L_a p)(f_e + J_e p) + k_e k_m}$

L'expression de $T_2(p)$ est donnée par l'expression suivante :

$$T_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = \frac{n(R_a + L_a p)}{(R_a + L_a p)(f_e + J_e p) + k_e k_m}$$

et $T_3(p)=1/p$

I-4. Les expressions de :

Gain statique K_s :

$$K_s = \frac{k_e}{\sqrt{J_e L_a (k_e k_m + R_a f_e)}}$$

Le coefficient d'amortissement m :

$$m = \frac{L_a f_e + R_a f_e}{2\sqrt{J_e L_a (k_e k_m + R_a f_e)}}$$

La pulsation propre non amortie :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_e k_m + R_a f_e}{J_e L_a}}$$

Application Numérique :

m =2.5662 - ω_o = 77.9744 rd/s - K_s = 256.4946