

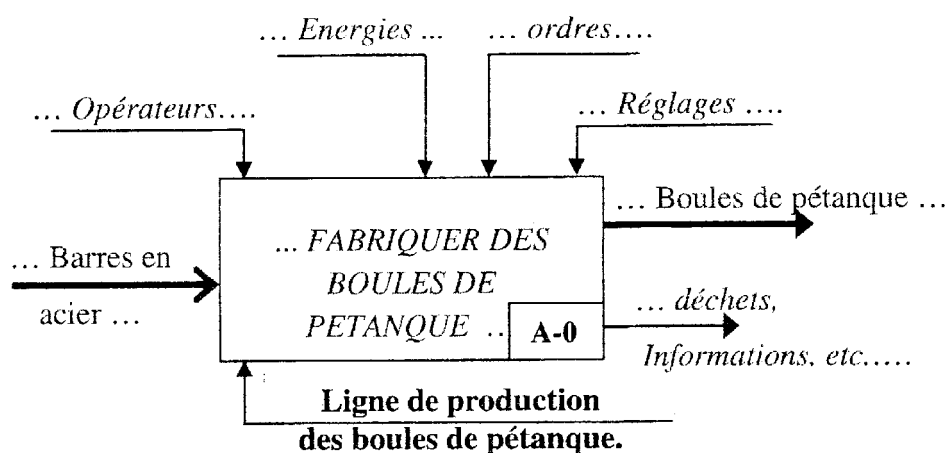
DOSSIER

DOCUMENT REPONSE

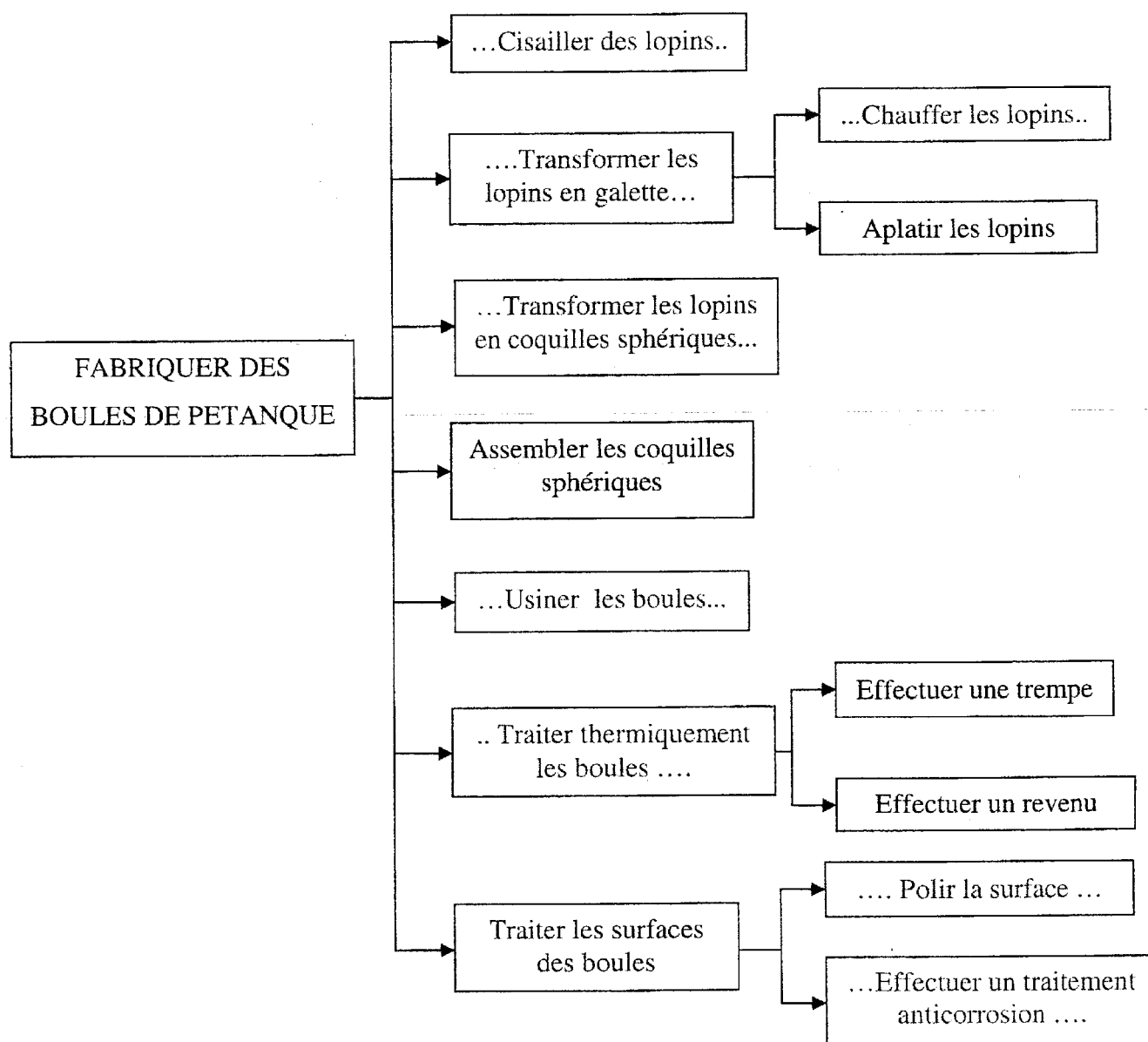
- ✓ Ce dossier comporte 15 pages numérotées de 1 à 15 :
 - Partie A - Technologie de Conception : Pages 1 et 2 ;
 - Partie B - Mécanique : Pages 3 à 9 ;
 - Partie C - Automatique : Pages 10 à 15 ;
- ✓ Un seul dossier document réponse est fourni au candidat et doit être rendu, en totalité, même sans réponses à la fin de l'épreuve.
- ✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

PARTIE A - TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

A.1- Compléter l'actigramme A-0 de la ligne de production des boules de pétanque :



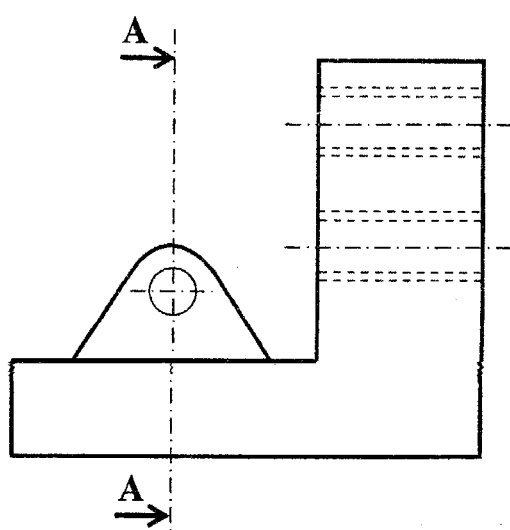
A.2- Compléter le diagramme FAST partiel suivant :



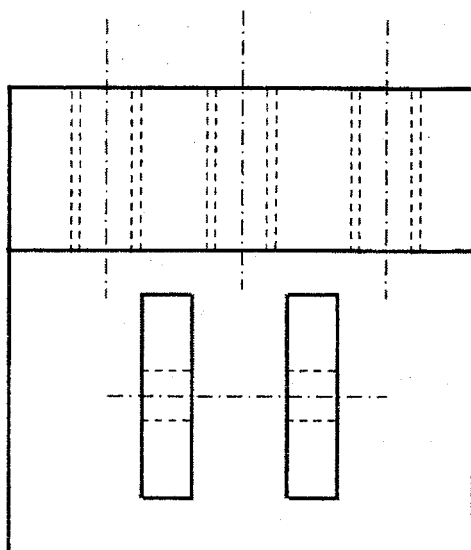
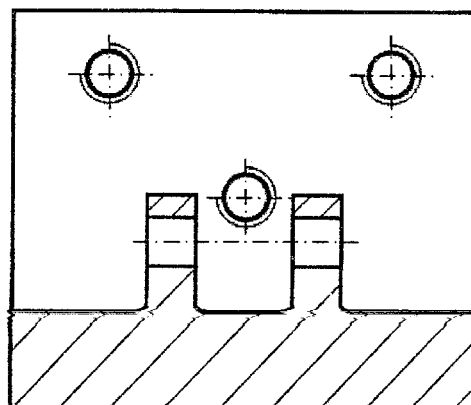
A.3- ETUDE GRAPHIQUE :

Le dessin ci-dessous représente le support d'articulation du cylindre de vérin qui commande la vé-came du système de transfert. Ce dessin comporte trois vues à compléter :

- la vue de face en coupe A-A ;
- la vue de dessus ;
- la vue de droite.



A - A



PARTIE B : MECANIQUE

B.1- ETUDE GEOMETRIQUE :

B.1.1- Ecrire, dans la base de R_0 , les équations scalaires traduisant la condition de fermeture géométrique de la chaîne $S_0-S_1-S_2-S_3-S_0$. En déduire le nombre de degrés de liberté du système.

..... $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

..... $\lambda \cos \alpha - 2e \sin \beta = a$ (1)

..... $\lambda \sin \alpha + 2e \cos \beta = b$ (2)

Degré de liberté d :

$d = \dots 3 - 2 = 1 \dots$

B.1.1- Déduire la relation entre λ et β ;

..... (1) $\Leftrightarrow \lambda \cos \alpha = a + 2e \sin \beta$

..... (2) $\Leftrightarrow \lambda \sin \alpha = b - 2e \cos \beta$

..... $(1)^2 + (2)^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = a^2 + b^2 + 4e(a \sin \beta - b \cos \beta)$

Relation entre λ et β : $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 4e^2 + 4e(a \sin \beta - b \cos \beta)$

B.2- GEOMETRIE DE MASSES :

On considère l'ensemble (S) regroupant les solides (S_3) et (S_4) : $S = \{S_3, S_4\}$ (Figure 2-B). (S_3) , dont les trous des axes d'articulation sont négligés, est assimilé à un secteur de cylindre homogène de rayon R , de longueur $2L$ et de masse m_3 . (S_4) est une boule homogène **supposée pleine**, de masse m_4 et de rayon r . Le centre d'inertie G_3 de (S_3) et G_4 de (S_4) appartiennent au plan de symétrie $(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$. On notera M la masse de (S) : $M = m_3 + m_4$.

B.2.1- Déterminer, dans la base de R_3 , le vecteur position de G_3 centre d'inertie de (S_3) : \vec{DG}_3 ;

..... (D, \vec{x}_3) est un axe de symétrie de $(S_3) \Rightarrow G_3 \in (D, \vec{x}_3) \Leftrightarrow y_{G_3} = z_{G_3} = 0$

(S_3) homogène $\Rightarrow Vx_G = \int_{P \in S} x_P dV(P) = \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 2Lr \cos \theta r dr d\theta = 2L \frac{-\sqrt{2}}{3} R^3$... et $V = \frac{3}{2} L\pi R^2$

..... $\Rightarrow x_{G_3} = \frac{-4\sqrt{2} R}{9 \pi}$

$\vec{DG}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2} R}{9 \pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 (.....) $\left. \begin{matrix} \dots \frac{-4\sqrt{2} R}{9 \pi} \dots \\ \dots 0 \dots \\ \dots 0 \dots \end{matrix} \right\} (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$

B.2.2- Déterminer, dans la base de R_3 , le vecteur position de centre G de (S) : \overrightarrow{DG} ;

..... $M\overrightarrow{DG} = \sum_3^4 m_i \overrightarrow{DG}_i = m_3 \overrightarrow{DG}_3 + m_4 \overrightarrow{DG}_4$

..... Or $\overrightarrow{DG}_3 = \frac{-4\sqrt{2}R}{9} \frac{\pi}{\pi} \vec{x}_3 = x_{G_3} \vec{x}_3$ et $\overrightarrow{DG}_4 = c \vec{x}_3$

..... $\overrightarrow{DG} = \frac{m_3 x_{G_3} + m_4 c}{M} \vec{x}_3$

$\overrightarrow{DG} =$	$\left(\begin{array}{c} \dots \frac{m_3 x_{G_3} + m_4 c}{M} \dots \\ \dots 0 \dots \\ \dots 0 \dots \end{array} \right)$
	$(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$

B.2.3- Montrer que la matrice d'inertie de (S) au point D est diagonale dans la base de R_3 :

..... Deux plans de symétrie : $(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ et $(D, \vec{x}_3, \vec{z}) \Leftrightarrow P_{Dx_3y_3} = P_{Dx_3z} = P_{Dy_3z} = 0$

..... Donc la matrice d'inertie de (S) au point D est diagonale dans la base de R_3

B.2.4- Déterminer le moment d'inertie de (S_3) par rapport à l'axe (D, \vec{z}) : I_3 ;

..... $I_3 = \int r^2 dm(P) = \int r^2 \rho dv(P) = \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^2 \rho 2Lr dr d\theta$ avec $\rho = \frac{m_3}{V} = \frac{2m_3}{3\pi LR^2}$...

..... $I_3 = \frac{m_3 R^2}{2}$

$I_3 = \dots \frac{m_3 R^2}{2} \dots$

B.2.5- Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (D, \vec{z}) : I ;

..... $I = I_3 + I_{Dz}(S_4)$ or $I_{Dz}(S_4) = I_{G_4z}(S_4) + m_4 c^2 = \frac{2}{5} m_4 r^2 + m_4 c^2$

..... $I = \frac{m_3 R^2}{2} + m_4 \left(\frac{2}{5} r^2 + c^2 \right)$

$I = \dots \frac{m_3 R^2}{2} + m_4 \left(\frac{2}{5} r^2 + c^2 \right) \dots$
--

B.3- ETUDE CINEMATIQUE :

B.3.1- Exprimer, dans la base de R_1 , les torseurs cinématiques suivants :

B.3.1.1- de mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) au point A : $\{V(S_1/S_0)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \dots \dot{\alpha} \vec{z} \dots \\ \dots L \dot{\alpha} \vec{y}_1 \dots \end{array} \right\}_A$;

B.3.1.2- de mouvement de (S_2) par rapport à (S_0) au point B : $\{V(S_2/S_0)\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots \dot{\alpha} \vec{z} \dots \\ \dots \lambda \dot{x}_1 + \lambda \dot{\alpha} \vec{y}_1 \dots \end{array} \right\}_B$;

B.3.1.3- de mouvement de (S_3) par rapport à (S_0) au point C : $\{V(S_3/S_0)\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \dots \dot{\beta} \vec{z} \dots \\ \dots \vec{0} \dots \end{array} \right\}_C$;

B.3.2- Déterminer, en fonction de $\dot{\beta}$, le vecteur vitesse du point B appartenant à (S_3) par rapport à (S_0) . En déduire, par projection dans la base de R_1 , une relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\lambda}$:

.....
 $\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(C \in S_3/S_0) + \overline{BC} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0) = 2e\dot{\beta}\vec{x}_3$

or $\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(B \in S_2/S_0) \Rightarrow 2e\dot{\beta}(\cos(\beta - \alpha)\vec{x}_1 + \sin(\beta - \alpha)\vec{y}_1) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \dot{\lambda}\vec{y}_1$

$\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \dots\dots\dots 2e\dot{\beta}\vec{x}_3 \dots\dots\dots ; \text{ Relation entre } \dot{\beta} \text{ et } \dot{\lambda} : \dots\dots\dots \dot{\lambda} = 2e\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \dots\dots\dots$
--

B.3.3- Exprimer, dans la base de R_3 , le vecteur vitesse du point G_4 centre de (S_4) : $\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0)$ (la boule (S_4) est supposée fixe dans (S_3)) :

.....
 $\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \underbrace{\vec{V}(G_4 \in S_4/S_3)}_{\vec{0}} + \vec{V}(G_4 \in S_3/S_0) = \vec{V}(C \in S_3/S_0) + \overline{G_4C} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0)$

 $\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \dot{\beta}(e\vec{x}_3 + c\vec{y}_3)$

$\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \dots\dots\dots \dot{\beta}(e\vec{x}_3 + c\vec{y}_3) \dots\dots\dots$

B.3.4- Exprimer, dans la base de R_3 , le vecteur accélération du point G_4 centre de (S_4) : $\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0)$

.....
 $\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0) = \frac{d\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0)}{dt} \Big|_{R_0} = (e\ddot{\beta} - c\dot{\beta}^2)\vec{x}_3 + (c\ddot{\beta} + e\dot{\beta}^2)\vec{y}_3$

$\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0) = \dots\dots\dots (e\ddot{\beta} - c\dot{\beta}^2)\vec{x}_3 + (c\ddot{\beta} + e\dot{\beta}^2)\vec{y}_3 \dots\dots\dots$

B.3.5- Lorsque la boule (S_4) atteint la gouttière (S_5) , son centre G_4 est sur l'axe (C, \vec{x}_5) . Si on note par $V_0 = \vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) \cdot \vec{y}_5$ la vitesse initiale de G_4 par rapport à (S_5) , donner l'expression de V_0 :

$V_0 = \dots\dots\dots \sqrt{e^2 + c^2}\dot{\beta} \dots\dots\dots$



B.4- ETUDE DYNAMIQUE :

Dans cette partie on suppose que le centre d'inertie G de (S) est confondu avec D ($\overline{DG} = \vec{0}$)
 et que le vérin (S_2) exerce sur (S_3) un effort axial au point B défini par : $\vec{F}(S_2 \rightarrow S_3) = F\vec{x}_1$.

B.4.1- Déterminer, en projection sur \vec{z} , le moment au point C des efforts extérieurs exercés sur (S) :

$$\dots\dots\dots \vec{M}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} = \vec{M}_C(S_0 \rightarrow S) \cdot \vec{z} + \vec{M}_C(\vec{g} \rightarrow S) \cdot \vec{z} + \vec{M}_C(S_2 \rightarrow S) \cdot \vec{z} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \vec{M}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \vec{M}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} = \dots\dots\dots 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta \dots\dots\dots$$

B.4.2- Déterminer le moment cinétique au point C associé au mouvement de (S) par rapport à (S_0) ;

$$\dots\dots\dots \vec{\sigma}_C(S/S_0) = \vec{\sigma}_D(S/S_0) + M\overline{CD} \wedge \vec{V}(D \in S/S_0) = [I_D(S)]\vec{\Omega}(S/S_0) + M(-e\vec{y}_3) \wedge e\beta\vec{x}_3 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = (I + Me^2)\dot{\beta}\vec{z} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \text{ou } \vec{\sigma}_C(S/S_0) = [I_C(S)]\vec{\Omega}(S/S_0) = I_{cz}\dot{\beta}\vec{z} \text{ car } C \text{ est fixe par rapport à } S_0 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \text{avec } I_{cz} = I_{Gz} + Me^2 = I + Me^2 \text{ (Th de Hygens) } \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \vec{\sigma}_C(S/S_0) = \dots\dots\dots (I + Me^2)\dot{\beta}\vec{z} \dots\dots\dots$$

B.4.3- Déterminer le moment dynamique au point C associé au mouvement de (S) par rapport à (S_0) ;

$$\dots\dots\dots \vec{\delta}_C(S/S_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}_C(S/S_0)}{dt} \right)_{R_0} = (I + Me^2)\ddot{\beta}\vec{z} \text{ car } C \text{ est fixe par rapport à } S_0 \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \vec{\delta}_C(S/S_0) = \dots\dots\dots (I + Me^2)\ddot{\beta}\vec{z} \dots\dots\dots$$

B.4.4- En appliquant le théorème du moment dynamique, en projection sur \vec{z} , à (S) au cours de son mouvement par rapport à (R_0) , déterminer l'expression permettant de calculer la force F développée par le vérin (S_2) en fonction de $\dot{\lambda}$, β , $\dot{\beta}$ et $\ddot{\beta}$ et des données du problème.

$$\dots\dots\dots R_0 \text{ est supposé galiléen } \Leftrightarrow \vec{\delta}_C(S/S_0) \cdot \vec{z} = \vec{M}_C(\bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{z} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (I + Me^2)\ddot{\beta} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta \text{ et } \dot{\lambda} = 2e\dot{\beta}Cos(\beta - \alpha) \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \mathbf{F} = \dots\dots\dots [(I + Me^2)\ddot{\beta} + eMgSin\beta] \frac{\dot{\beta}}{\dot{\lambda}} \dots\dots\dots$$

B.5- ETUDE DU MOUVEMENT DE LA BOULE DANS LA GOUTTIERE :

Une fois transférer, la boule (S_4) commence à rouler sans glisser dans la gouttière (S_5) à travers un contact ponctuel en deux points I et J et sous l'effet d'une adhérence de coefficient f .

L'action mécanique de contact de la gouttière (S_5) sur la boule (S_4) aux points I et J est

définie par les deux torseurs : $\{T_1(S_5 \rightarrow S_4)\}_I = \begin{Bmatrix} N\vec{n}_I - T\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ et $\{T_2(S_5 \rightarrow S_4)\}_J = \begin{Bmatrix} N\vec{n}_J - T\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_J$

Le moment d'inertie de la boule par rapport à l'axe (G_4, \vec{z}) est : $I_{G_4z} = \frac{2}{5} m_4 r^2$.

B.5.1- En se basant sur la condition de roulement sans glissement de (S_4) par rapport à (S_5), déterminer, en fonction de $\dot{\phi}$, le vecteur vitesse du point G_4 centre de (S_4) par rapport à (R_5) :

..... $\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \vec{V}(I \in S_4/R_5) + \vec{G_4I} \wedge \vec{\Omega}(S_4/R_5) = -r\vec{n}_I \wedge \dot{\phi}\vec{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\phi} \vec{y}_5$

$\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \dots\dots\dots \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\phi} \vec{y}_5 \dots\dots\dots$

B.5.2- Déterminer l'énergie cinétique de (S_4) dans son mouvement par rapport à R_5 ;

..... $Ec(S_4/R_5) = \frac{1}{2} (I_{G_4z} \dot{\phi}^2 + m_4 \vec{V}^2(G_4 \in S_4/R_5)) = \frac{1}{2} (\frac{2}{5} m_4 r^2 \dot{\phi}^2 + m_4 \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}^2)$

$Ec(S_4/R_5) = \dots\dots\dots \frac{9}{20} m_4 r^2 \dot{\phi}^2 \dots\dots\dots$

B.5.3- Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur (S_4) au cours de son mouvement par rapport à R_5 ;

..... $P(\vec{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \underbrace{P(S_5 \rightarrow S_4/R_5)}_0 + P(\vec{g} \rightarrow S_4/R_5) = m_4 \vec{g} \cdot \vec{V}(G_4 \in S_4/R_5)$

..... $P(\vec{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \text{Sin} \gamma \dot{\phi}$

$P(\vec{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \dots\dots\dots \frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \text{Sin} \gamma \dot{\phi} \dots\dots\dots$



B.5.4- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à (S_4) au cours de son mouvement par rapport R_5 . En déduire son équation de mouvement.

..... R_5 (fixe par rapport à R_0) est supposé galiléen $\Rightarrow P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \frac{dEc(S_4/R_5)}{dt}$

..... $\frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \sin \gamma \dot{\varphi} = \frac{9}{10} m_4 r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \Leftrightarrow 9r\ddot{\varphi} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$

Equation de mouvement de S_4/R_5 : $9r\ddot{\varphi} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$

Soit y l'ordonnée du centre d'inertie G_4 de (S_4) sur l'axe (E, \vec{y}_5) : $\overline{EG}_4 = y\vec{y}_5$. On suppose qu'initialement à $t = 0$: $\varphi = 0, y = 0$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_0$.

B.5.5- Exprimer l'équation de mouvement de (S_4) par rapport à R_5 en fonction de \ddot{y} .

..... $\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \dot{y}\vec{y}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\varphi} \vec{y}_5 \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \dot{\varphi} \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \ddot{\varphi} \Leftrightarrow \sqrt{2}\ddot{y} = r\ddot{\varphi}$

..... $9\sqrt{2}\ddot{y} - 5\sqrt{2}g \sin \gamma = 0$

Equation de mouvement de S_4/R_5 : $9\ddot{y} - 5g \sin \gamma = 0$

B.5.6- Déterminer le paramètre de position $y(t)$:

..... $\ddot{y} = \frac{5}{9} g \sin \gamma \Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g \sin \gamma\right) t + C_1$ or pour $t = 0, \dot{y} = V_0 \Rightarrow C_1 = V_0$

..... $\Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g \sin \gamma\right) t + V_0$

..... $\Rightarrow y = \left(\frac{5}{18} g \sin \gamma\right) t^2 + V_0 t + C_2$ or pour $t = 0, y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y(t) = \dots y = \left(\frac{5}{18} g \sin \gamma\right) t^2 + V_0 t$

B.5.7- En appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S_4) au cours de son mouvement par rapport R_5 , exprimer, en fonction de m_4 , g et γ , les efforts tangentiel et normal (T et N) exercés par la gouttière (S_5) sur la boule (S_4) :

..... R_5 est supposé galiléen $\Rightarrow \vec{R}(\bar{S}_4 \rightarrow S_4) = m_4 \vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/R_5) = m_4 \ddot{y}_5 \vec{y}_5$

..... $\begin{cases} \sqrt{2}N - m_4 g \cos \gamma = 0 & (1) \\ m_4 g \sin \gamma - 2T = m_4 \ddot{y} & (2) \end{cases}$ et $\ddot{y} = \frac{5}{9} g \sin \gamma$

$$N = \dots \frac{1}{\sqrt{2}} m_4 g \cos \gamma \dots$$

$$T = \dots \frac{2}{9} m_4 g \sin \gamma \dots$$

B.5.8- En se basant sur la loi de Coulomb relative au roulement sans glissement, déterminer la valeur maximale de l'angle γ pour que (S_4) roule sans glisser sur la gouttière (S_5) :

..... Roulement sans glissement $\Leftrightarrow \|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\| \Leftrightarrow \frac{2}{9} m_4 g \sin \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{2}} f m_4 g \cos \gamma$

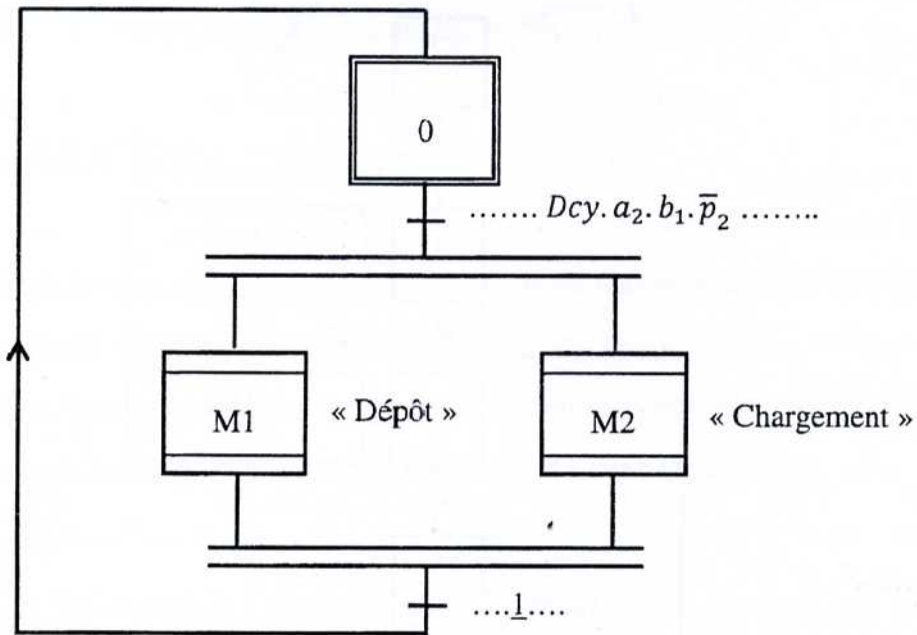
..... $\tan \gamma \leq \frac{9}{2\sqrt{2}} f$

$$\tan \gamma \leq \dots \frac{9}{2\sqrt{2}} f \dots$$

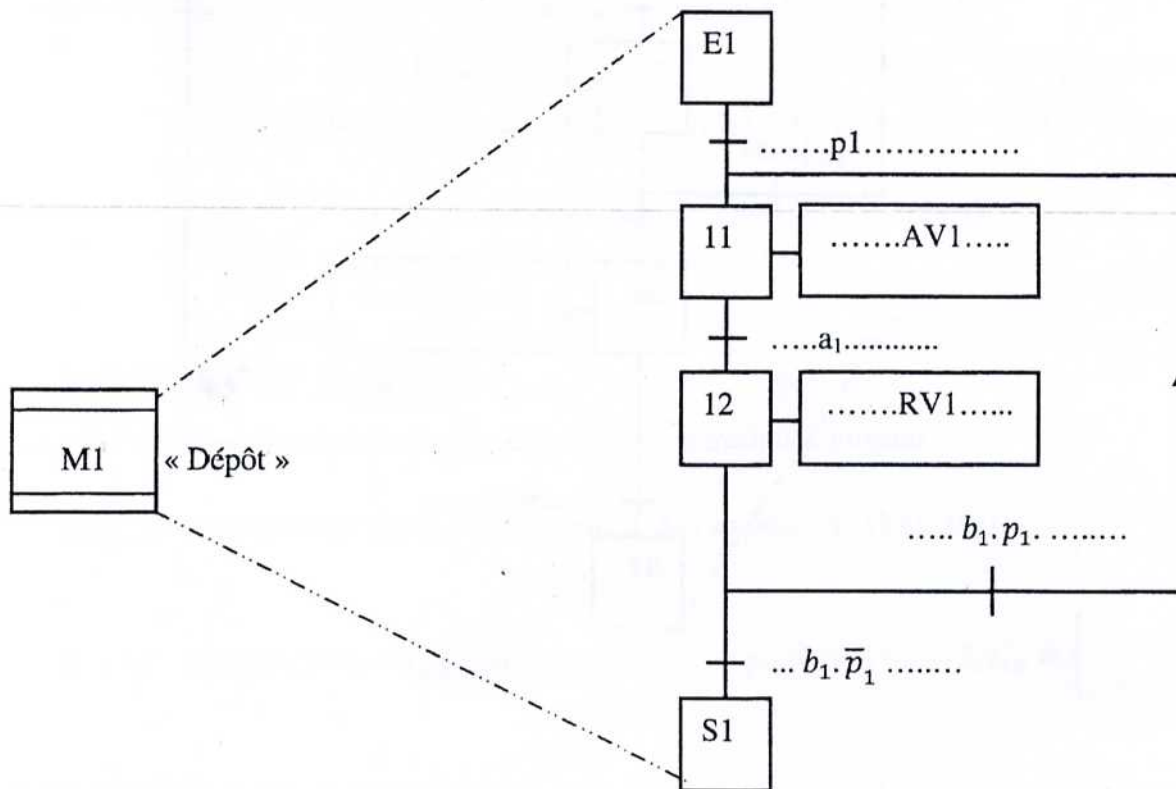
PARTIE C - AUTOMATIQUE

C.1- Commande séquentielle du poste de transfert des boules :

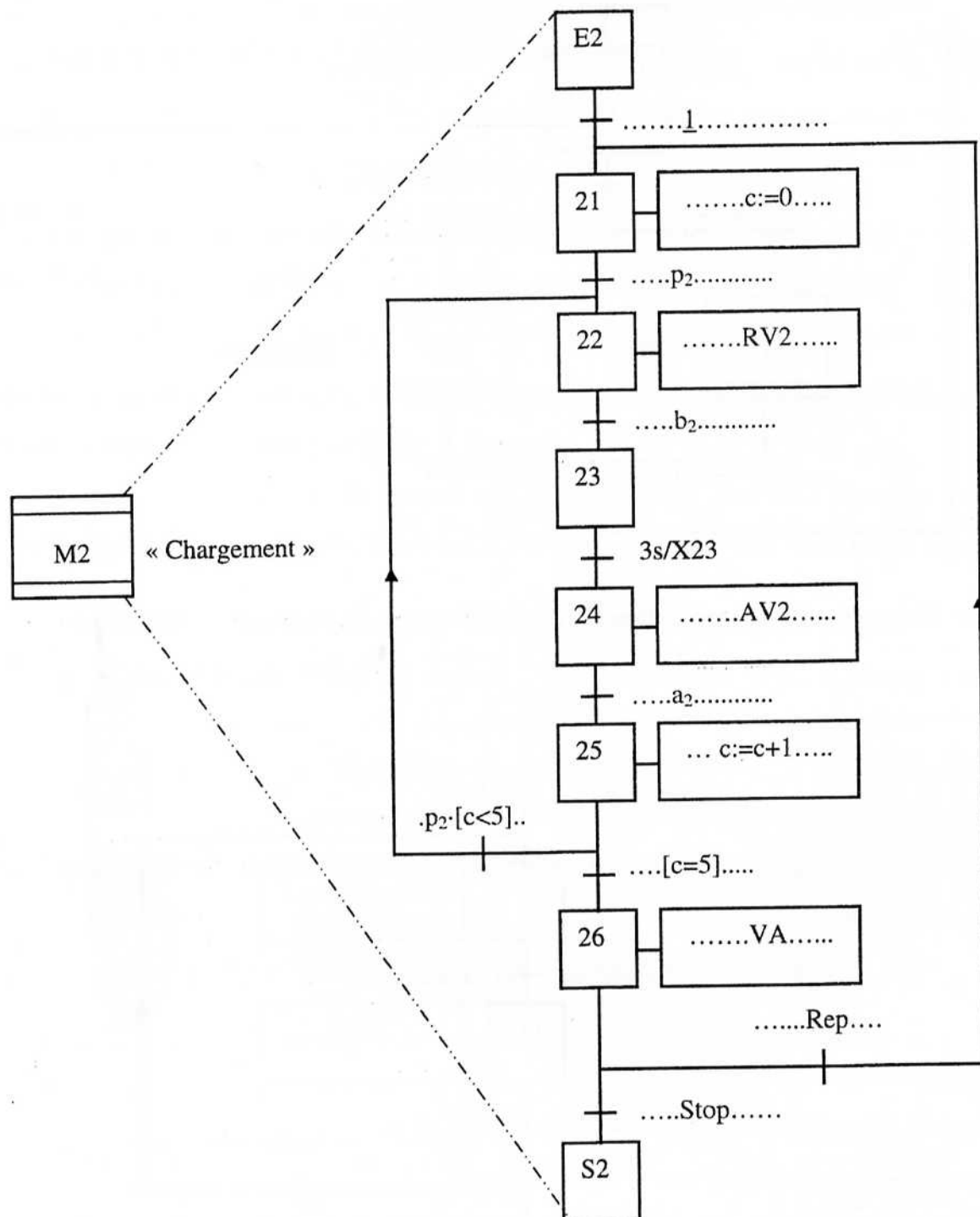
C.1.1- Compléter le GRAFCET suivant qui décrit le fonctionnement du système de transfert:



C.1.2- Compléter l'expansion de la macro-étape M1 « Dépôt » dont la structure est donnée ci-dessous:



C.1.3- Compléter l'expansion de la macro-étape M2 « Chargement » dont la structure est donnée ci-dessous:



C.2- REGULATION DE LA TEMPERATURE DU FOUR TUNNEL :

Premier cas : régulateur proportionnel avec retour unitaire

$$C_1(p) = k_r \quad \text{avec } k_r > 0, \quad C_2(p) = 1$$

Dans ce cas, on suppose que la perturbation est nulle : $l(t) = 0$.

C.2.1- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$ (la mettre sous la forme canonique standard d'un système de premier ordre $\frac{k_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$). **Exprimer** le gain statique k_{BF} et la constante de temps τ_{BF} en fonction de k_r , k et τ avec $k = k_1 \cdot k_2$.

$$H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1+C_1(p)H(p)} = \frac{\frac{kk_r}{1+kk_r}}{1+\frac{\tau}{1+kk_r}p} = \frac{k_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$$

Par identification, on obtient : $k_{BF} = \frac{kk_r}{1+kk_r}$ et $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+kk_r}$

C.2.2- Donner l'expression de l'erreur statique (e_s) sachant que le signal de référence est un échelon de position d'amplitude y_{c1} .

$$E(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = (1 - H_{BF}(p))Y_{ref}(p)$$

$$E(p) = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}Y_{ref}(p) \quad \text{et} \quad Y_{ref}(p) = \frac{1}{p}y_{c1}$$

L'erreur statique est donnée par : $e_s = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \frac{1}{1+kk_r}y_{c1}$

C.2.3- Donner l'expression de la valeur initiale du signal de commande sachant que le signal de référence est un échelon de position d'amplitude y_{c1} .

$$U(p) = k_r E(p) \quad \text{d'où} \quad U(p) = \frac{k_r}{1+C_1(p)H(p)}Y_{ref}(p) \quad \text{et} \quad Y_{ref}(p) = \frac{1}{p}y_{c1}$$

La valeur initiale est donnée par : $u(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pU(p) = k_r y_{c1}$

C.2.4- On fixe k_r de façon à limiter la valeur initiale de la commande à (+ 10 V). Sachant que $y_{c1} = 8 V$, **Donner** les valeurs de k_r , k_{BF} , τ_{BF} et de l'erreur statique e_s . **En déduire** la valeur de la température θ dans le four en régime permanent.

..... On a: $u(0) = k_r y_{c1}$, $k = k_1 k_2 = 1$, $k_{BF} = \frac{kk_r}{1+kk_r}$, $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+kk_r}$, $e_s = \frac{1}{1+kk_r} y_{c1}$

..... $k_r = 1.25$ $k_{BF} = 0.555$ $\tau_{BF} = 160 s$ $e_s = 3.555 V$

..... $e_s = y_{c1} - y_{\infty}$ donc $y_{\infty} = y_{c1} - e_s = 4.444 V$ $\theta = \frac{y_{\infty}}{0.02} = 222.222 \text{ } ^\circ C$

Deuxième cas : régulateur proportionnel avec retour non unitaire

$$C_1(p) = k_r \quad \text{avec } k_r > 0, \quad C_2(p) = \lambda$$

C.2.5- On suppose que : $l(t) = 0$.

C.2.5.1- **Donner** la nouvelle expression de l'erreur statique dans le cas où le signal de référence est un échelon de position d'amplitude y_{c1} . **Donner** l'expression du paramètre λ permettant d'annuler l'erreur statique de position.

..... $E(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = Y_{ref}(p) - \frac{H_{BF}(p) Y_{ref}(p)}{1 + C_1(p) C_2(p) H(p)}$

..... $E(p) = \frac{1 + (\lambda - 1) C_1(p) H(p)}{1 + \lambda C_1(p) H(p)} Y_{ref}(p)$ et $Y_{ref}(p) = \frac{1}{p} y_{c1}$

..... L'erreur statique est donnée par : $e_s = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) = \frac{1 + (\lambda - 1) k k_r}{1 + \lambda k k_r} y_{c1}$

..... L'erreur statique est nulle lorsque : $\lambda = \frac{k k_r - 1}{k k_r}$

C.2.5.2- **Donner** l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée pour la valeur de λ calculée dans la question précédente. **Donner** la valeur de la constante de temps du système en boucle fermée sachant que $k_r = 1,25$.

..... $H_{BF}(p) = \frac{C_1(p) H(p)}{1 + C_1(p) C_2(p) H(p)} = \frac{\frac{k k_r}{1 + \lambda k k_r}}{1 + \frac{\tau}{1 + \lambda k k_r} p}$

..... Pour la valeur de : $\lambda = \frac{k k_r - 1}{k k_r}$, on obtient : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{k k_r} p}$

..... $\tau_{BF} = \frac{\tau}{k k_r}$ $\tau_{BF} = 288 s$

C.2.6- On suppose que $l(t) \neq 0$. La perturbation est de type échelon de position.

C.2.6.1- En considérant que la consigne est nulle, **Donner** l'expression de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} :$$

$$Y(p) = H(p)U(p) + L(p) = -C_1(p)C_2(p)H(p)Y(p) + L(p)$$

$$\text{Soit } (1 + C_1(p)C_2(p)H(p))Y(p) = L(p)$$

$$\text{Ce qui conduit à } Y(p) = \frac{1}{1 + C_1(p)C_2(p)H(p)} L(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} = \frac{1}{1 + C_1(p)C_2(p)H(p)}$$

$$F(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \lambda k k_r + \tau p}$$

C.2.6.2- Calculer la valeur finale de la sortie $y(t)$ sachant que le signal de perturbation est un échelon d'amplitude 1 V, $k_r = 1,25$ et λ est la valeur assurant une erreur statique nulle.

$$y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)L(p) \Leftrightarrow y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1 + \tau p}{1 + \lambda k k_r + \tau p} \frac{1}{p}$$

$$y_\infty = \frac{1}{1 + \lambda k k_r}$$

On remplace λ par sa valeur assurant une erreur statique nulle, on obtient : $y_\infty = \frac{1}{k k_r}$

$$y_\infty = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ V}$$

3^{ème} Cas : régulateur proportionnel intégral avec retour unitaire

$$C_1(p) = k_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \quad \text{et} \quad C_2(p) = 1$$

C.2.7- On suppose que $l(t) = 0$.

C.2.7.1- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$.

$$H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1 + C_1(p)H(p)} = \frac{k k_r (1 + T_i p)}{T_i \tau p^2 + T_i (1 + k k_r) p + k k_r}$$

C.2.7.2- On pose: $x = kk_r$, **Donner** l'expression de dénominateur $D(p)$ de $H_{BF}(p)$ en fonction de x , T_i et τ . **Donner**, selon la nature de la réponse du système en boucle fermée (réponse apériodique ou réponse pseudo-périodique), la relation entre les paramètres x , T_i et τ .

$$D(p) = T_i \tau p^2 + T_i(1 + kk_r)p + kk_r = T_i \tau p^2 + T_i(1 + x)p + x$$

$$\text{Le discriminant est donné par : } \Delta(p) = T_i^2(1 + x)^2 - 4T_i \tau x$$

$$\text{Réponse apériodique : } \Delta(p) \geq 0 : \frac{\tau}{T_i} \leq \frac{(1+x)^2}{4x}$$

$$\text{Réponse pseudo périodique : } \Delta(p) < 0 : \frac{\tau}{T_i} > \frac{(1+x)^2}{4x}$$

C.2.8- On suppose que $l(t) \neq 0$. La perturbation est de type échelon de position.

C.2.8.1- En considérant que la consigne est nulle, **Donner** l'expression de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)}$$

$$Y(p) = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)} L(p) \Leftrightarrow F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}$$

$$F(p) = \frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i \tau p^2 + T_i(1+kk_r)p + kk_r}$$

C.2.8.2- Calculer la valeur finale de la sortie $y(t)$ sachant que le signal de perturbation est un échelon d'amplitude 1 V.

$$y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)L(p)$$

$$y_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i \tau p^2 + T_i(1+kk_r)p + kk_r} \frac{1}{p}$$

$$y_\infty = 0$$

C.2.9- Comparer les performances des régulateurs étudiés.

..... **Régulateur proportionnel** : erreur statique non nulle, dynamique rapide.....

..... **Régulateur proportionnel avec retour non unitaire** : erreur statique nulle, dynamique lente, n'élimine pas l'effet de la perturbation.

..... **Régulateur proportionnel intégral** : erreur statique nulle, la dynamique dépend des paramètres du régulateur, élimine l'effet de la perturbation.