REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session : Juin 2002

Concours en Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures   Date : 3 Juin 2002   Heure : 8 H   Nb pages : 4
Barème : Exercice : 7 pts   Problème : 13 pts

Une grande importance sera attachée la rigueur du raisonnement, la clarté et soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisés.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Soit $(a_n)_{n\in I\!N}$ la suite de nombres réels définie par la donnée de a_0, $0 < a_0 < 1$, et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n - a_n^2$$

1)
1-a) Démontrer que la suite (a_n) est décroissante , et que pour tout $n \geq 0$, $0 < a_n < 1$.
1-b) En déduire que la suite (a_n) est convergente . Trouver sa limite.
2)
2-a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$ est convergente, et donner sa somme.
2-b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $\log(1 - a_n) = \log(a_{n+1}) - \log(a_n)$.
En déduire que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \log(1 - a_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ sont divergentes .
3) Prouver que la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$$

est absolument convergente pour tout x réel.

Dans la suite, pour tout x réel et $N \in I\!N$, on pose :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \text{ et } G_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n.$$

4) Prouver que, pour tout entier N et tout $x \geq 0$, on a :

$$0 \leq G(x) - G_N(x) \leq a_{N+1}$$

et en déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$, et que :

5) Montrer que pour tout $s \in]0,1[$,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 e^{(s-1)t} G(st) = 0$$

et en déduire que la fonction $t \longmapsto e^{(s-1)t} G(st)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $s \in]0,1[$.
6) Prouver que pour tout $s \in]0,1[$,

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t} G(st)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \ .$$

Problème

Partie 1

Soit φ une fonction définie et continue sur $[-1,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_n : [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(n\varphi(x)) \end{aligned}$$

1) Vérifier les relations de récurrences suivantes : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \geq 1$:

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2\cos(\varphi(x)) f_n(x).$$

2) Plus généralement vérifier que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall m \geq n$:

$$f_{m+n}(x) + f_{m-n}(x) = 2 f_m(x) f_n(x).$$

Dans la suite du problème, on pose $\varphi(x) = \arccos(x)$, et on désigne par T_n l'application :

$$\begin{aligned} T_n : [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(n \arccos(x)) \end{aligned}$$

3) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout entier $n \geq 0$:

$$e^{in \arccos(x)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k} \ .$$

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, T_n est une fonction polynôme définie pour tout $x \in [-1,1]$ par :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k} \quad \text{où } E(\frac{n}{2}) \text{ désigne la partie entière de } \frac{n}{2} \ .$$

5) Déterminer le degré et la parité de T_n .

Partie 2

Pour tout entier $n \geq 2$, et $x \in [-1,1]$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{et } V_n(x) = \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_{n-2}(x) \\ T_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

1) Vérifier les relations de récurrence suivantes : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \geq 1$:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \ .$$

Préciser $T_0(x)$ et $T_1(x)$.

2) Calculer le produit $(M_n - xI_n)V_n(x)$, où I_n est l'identité de $M_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, montrer que $x_{k,n} = \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ est une racine de T_n.

En déduire toutes les racines de T_n.

4) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$,

$$(M_n - x_{k,n}I_n)V_n(x_{k,n}) = 0 \ .$$

5) Montrer que les valeurs propres de M_n sont les n racines de T_n .

Quels sont les vecteurs propres associés ?

6) Montrer que la matrice M_n est diagonalisable.

Partie 3

On désigne par E l'éspace vectoriel des applications continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire $<,>$, défini par :

$$<,> \ : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longmapsto < f, g > \ = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$$

1) Vérifier que pour tout f , $g \in E$,

$$< f, g > \ = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))d\theta \ .$$

2) Prouver que les T_n sont orthogonaux deux à deux .

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \ < T_n, T_n >= 1 \text{ et } < T_0, T_0 >= 2 \ .$$

3) En déduire que $(T_0, T_1, ..., T_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $f \in E$, pour tout entier $N \geq 1$, on note :

$$S_N(f) = \frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum_{n=1}^{N} < f, T_n > T_n$$

et soit g l'application paire définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\theta) = f(\cos(\theta))$.

4) Montrer que pour tout entier n,

$$a_n(g) =< f, T_n >, \text{ où } \ a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(\theta)\cos(n\theta)d\theta \ .$$

5) Montrer que pour tout $\theta \in I\!R$ et $N \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{N} a_n(g)\cos(n\theta) = S_N(f)(\cos(\theta)) \ .$$

6) Montrer que si f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[-1,1]$, alors la série $\frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum\limits_{n\geq 1} < f, T_n > T_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et que :

$$\frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum_{n=1}^{\infty} < f, T_n > T_n = f \ .$$

7) Réciproquement, on suppose que $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ est absolument convergente,

7-a) Montrer que la série de fonctions $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} \alpha_n T_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

7-b) Montrer que si f est sa somme , alors, $\forall n \geq 0$, $\alpha_n = < f, T_n >$.

Partie 4

Soit h l'application 2π−périodique, paire, définie sur $[0,\pi]$ par $h(\theta) = \theta$.

1)

1-a) Tracer le graphe de h .

1-b) Déterminer la série de Fourier de h .

1-c) Etudier la convergence de la série de Fourier de h sur $I\!R$.

1-d) En déduire que pour tout $\theta \in [0,\pi]$,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\theta)}{(2n+1)^2} \ .$$

2) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \ .$$

3) En posant $\theta = \arccos(x)$, montrer que $\forall x \in [-1,1]$,

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x)$$

$$\arcsin(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x) \ .$$

4) Trouver la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

5) Montrer que

$$< \arccos(x), T_n > = \begin{cases} \pi & \text{si } \ n = 0 \\ 0 & \text{si } \ n = 2p, p \geq 1 \\ -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2p+1)^2} & \text{si } \ n = 2p+1, p \geq 0 \end{cases} \ .$$

6) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin(x)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\arccos(x) T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ dx \ .$$

7) En déduire que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin(x)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \ .$$