



## Concours Physique et Chimie Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 31 Mai 2010    Heure: 8 H    Durée: 4 H    Nbre pages: 5

Barème : Exercice: 4 pts,    Problème: Partie I: 9 pts,    Partie II: 7 pts.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels non nuls,  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels,  $\mathbb{R}_+$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  formé des nombres réels positifs,  $\mathbb{R}^*$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  formé des nombres réels différents de 0 et  $\mathbb{R}_+^*$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  formé des nombres réels strictement positifs.

### Exercice

Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On définit la fonction  $g$  par

$$g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \longmapsto g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

1. (a) Justifier que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ .  
(b) Calculer les dérivées partielles premières  $\frac{\partial g}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}$  en fonction de  $\varphi'$ .  
(c) Calculer les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$  en fonction de  $\varphi'$  et  $\varphi''$ .

2. Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle

$$tz''(t) + z'(t) = 2t. \quad (1)$$

3. On veut déterminer les fonctions  $\varphi$  pour lesquelles la fonction  $g$  vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 8(x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \quad (2)$$

- (a) Montrer que si la fonction  $g$  vérifie (2) alors la fonction  $\varphi$  vérifie l'équation différentielle (1), et donner l'expression de  $\varphi$ .  
(b) En déduire l'expression de  $g$ .  
(c) Déterminer la fonction  $g$  solution (2) et vérifiant  $g(1, 0) = 0$  et  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) =$

## Partie I

### Notations

- $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  désigne un réel strictement positif.
- $\omega_\alpha$  désigne la fonction définie par  $\omega_\alpha(t) = t^{\alpha-1}e^{-t}$ , pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ .
- $E$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur  $[0, +\infty[$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est le sous-espace de  $E$  formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- On désigne par  $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$  la base canonique de  $E_n$ .

1. Montrer que, pour tout  $(P, Q) \in E^2$ , la fonction  $PQ\omega_\alpha$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

2. On définit  $\Phi_\alpha$  par:

$$\Phi_\alpha(P, Q) = \int_0^\infty P(x)Q(x)\omega_\alpha(x)dx.$$

Montrer que  $\Phi_\alpha$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

On notera par  $\|P\|^2 = \Phi_\alpha(P, P)$ , où  $\|P\|$  désigne la norme de  $P$  pour le produit scalaire  $\Phi_\alpha$ .

3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit l'équation différentielle suivante:

$$(\mathcal{L}_\lambda) : \quad xy''(x) + (\alpha - x)y' + \lambda y = 0.$$

On va chercher les solutions  $y_\lambda$  développables en séries entières non nulles.

(a) Montrer que les coefficients de la série entière solution de  $(\mathcal{L}_\lambda)$  vérifient la relation:

$$a_{k+1} = -\frac{\lambda - k}{(k+1)(\alpha + k)}a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(b) Expliciter les solutions  $y_\lambda$  de  $(\mathcal{L}_\lambda)$ .

(c) Pour  $\lambda = n \in \mathbb{N}$ , montrer que les solutions sont des fonctions polynômiales de degré  $n$ .

On note  $L_n$  les solutions dont le coefficient dominant  $a_n$  est égal à 1.

(d) Calculer  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .

(e) Expliciter, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction polynômiale  $L_n$ .

4. Soit  $f(x) = x\omega_\alpha(x)y'(x)$  où  $y$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que  $y$  est solution de  $(\mathcal{L}_n)$  si et seulement si  $f$  vérifie l'équation différentielle suivante:

$$F_n : \quad f'(x) + n\omega_\alpha(x)y(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Montrer que, pour tout  $(P, Q) \in E^2$ , on a:

$$\Phi_{\alpha+1}(P, Q) = \Phi_{\alpha}(xP, Q) = \Phi_{\alpha}(P, xQ).$$

avec  $xP$  (respectivement  $xQ$ ) désigne la fonction polynômiale associée au polynôme  $(XP)(X) = XP(X)$  (respectivement  $(XQ)(X) = XQ(X)$ ).

(c) En utilisant la question 4.(a), montrer que:

$$n\Phi_{\alpha}(L_n, L_m) = \Phi_{\alpha+1}(L'_m, L'_n) = m\Phi_{\alpha}(L_n, L_m), \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

où  $L'$  désigne la fonction dérivée de  $L$ .

(d) Montrer que la famille  $(L_k)_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$  est une base orthogonale de  $E_n$ .

5. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , justifier l'existence d'une unique famille de coefficients réels  $(\beta_{n,k})_{0 \leq k \leq n+1}$  telle que:

$$xL_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_{n,k} L_k(x).$$

(b) Soit  $n \geq 2$ . justifier que, pour tout  $k \leq n-2$ , on a  $\beta_{n,k} = 0$ .

(c) En utilisant la question 3.(d), vérifier que:

$$\begin{cases} \beta_{n,n+1} = 1, \\ \beta_{n,n} = \alpha + 2n, \\ \beta_{n,n-1} = n(\alpha + n - 1). \end{cases}$$

(d) Vérifier que

$$L_{n+1}(x) = (x - \alpha - 2n)L_n(x) - n(\alpha + n - 1)L_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

(e) En utilisant la question 5.(a), montrer que:

$$\beta_{n,n+1}\Phi_{\alpha}(L_{n+1}, L_{n+1}) = \beta_{n+1,n}\Phi_{\alpha}(L_n, L_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(f) Dédurre la norme de  $L_n$ .

(g) On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $E_n$  défini par

$$\varphi(P)(x) = \frac{x}{n}P''(x) + \frac{\alpha - x}{n}P'(x).$$

Montrer que  $\varphi$  est bien défini et donner sa matrice dans la base canonique de  $E_n$ .

(h) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable.

(i) Calculer  $\varphi(L_k)$ , expliciter une base de vecteurs propres pour  $\varphi$ .

## Partie II

1. Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on considère la fonction  $g$  définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto \cos(xt), \end{aligned}$$

$2\pi$  périodique et paire.

- (a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de  $g$ .
- (b) Établir que, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

2. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. On admet le résultat suivant:

**La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$  est convergente.**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \quad \text{et} \quad H_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}.$$

- (a) Soit  $u_n$  la suite de fonctions définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

Montrer que

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}.$$

( Indication: Utiliser le théorème des accroissements finis pour la fonction  $\frac{1}{t^x}$  ).

- (b) Montrer que la série des fonctions de terme général  $u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers une fonction continue qui sera notée  $U$ .
- (c) Montrer que la suite des fonctions  $v_n(x) = H_n(x) - \frac{n^{1-x}}{1-x}$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$  vers une fonction qui sera notée  $\zeta$ .
- (d) Montrer que

$$U(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in ]1, +\infty[.$$

- (e) Montrer que la suite numérique  $H_n(1) - \ln(n)$  est convergente. On note  $\gamma$  sa limite.

- (f) Prouver que la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  définit une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ . On note  $f$  cette fonction.

- (g) Montrer que, pour tout  $x > 1$ , on a

$$S_{2n}(x) = H_{2n}(x) - 2^{1-x} H_n(x).$$

(h) En déduire que

$$f(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x), \quad \forall x \in ]1, \infty[.$$

(i) Montrer que la fonction  $\zeta$  admet au voisinage de 1 le développement suivant:

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

(Indication: Utiliser la question 2.(c) et 2.(d)).

(j) Soit  $x > 0$  et  $a > -1$ . Etudier l'intégrabilité de la fonction  $t \rightarrow \varphi_a(t) = \frac{t^{x-1}}{a + e^t}$  sur  $]0, +\infty[$ . On désignera par la suite

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_0(t) dt.$$

(k) Prouver que, pour  $|a| < 1$  et  $x > 0$ , on a:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{a + e^t} = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{(n+1)^x}.$$

(l) Dédurre la relation:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + e^t} = \Gamma(x) f(x).$$

(m) Soit  $x \in ]0, 1[$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit une suite de fonctions par:

$$\begin{cases} w_0(t) = t^{x-1} \\ w_n(t) = (-1)^n t^n (t^x - t^{-x}) \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

i. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 w_n(t) dt$ .

ii. Prouver que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

**Fin de l'épreuve**