



## Concours Physique et Chimie Épreuve de Mathématiques

Date: Lundi 4 Juin 2012    Heure : 8 H    Durée: 4 heures    Nb pages: 5  
Barème: Partie I: 3 pts, Partie II: 1.5 pts, Partie III: 5 pts, Partie IV: 7 pts,  
Partie V: 3.5 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

### Rappels et notations:

- $\mathbb{R}[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On confondra entre polynôme et fonction polynôme associée.
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ , de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $C(I, \mathbb{R})$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies et continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### PROBLÈME

Considérons dans  $\mathbb{R}[X]$  les deux polynômes suivants:

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \quad \text{et} \quad B = \beta_0 + \beta_1 X.$$

Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose:

$$\mathcal{L}(P) = AP'' + BP'.$$

### PARTIE I

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{L}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Dans la suite de la partie I, on prend  $n = 2$ .

2. (a) Montrer que la matrice  $M$  de  $\mathcal{L}$  dans la base canonique  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2(\alpha_1 + \beta_0) \\ 0 & 0 & 2(\alpha_2 + \beta_1) \end{pmatrix}.$$

- (b) Vérifier que, si  $\forall k \in \{0, 1, 2\}, k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$ , alors  $M$  est diagonalisable.
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  et que  $\beta_1 \neq 0$ .
- (a) Vérifier que  $M$  est diagonalisable.
- (b) Donner une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  qui diagonalise  $M$ .
4. On prend  $A = \alpha_2(X^2 - 1)$  et  $B = \beta_0 + \beta_1 X$ , avec  $\beta_1 \neq 0$  et  $2\alpha_2 + \beta_1 = 0$ .  
Montrer que, dans ce cas,  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $\beta_0 = 0$ .

Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\omega$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Dans toute la suite du problème, on note  $\mathbf{H}$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $I$  à valeurs réelles, telles que  $\omega f^2$  soit intégrable sur  $I$ .

## PARTIE II

1. (a) Vérifier que l'on a:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ .  
(b) Montrer alors que  $\mathbf{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ .
2. Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathbf{H}$ . Montrer que  $\omega \cdot f \cdot g$  est intégrable sur  $I$ .
3. On associe à tout couple  $(f, g)$  de vecteurs de  $\mathbf{H}$  le réel:

$$\langle f, g \rangle = \int_I \omega(t) f(t) g(t) dt.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathbf{H}$ .

Dans ce qui suit, on munit  $\mathbf{H}$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

## PARTIE III

Dans cette partie, on considère  $I = ]-1, 1[$ ,  $\omega$  définie sur  $I$  par

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$A = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad B = 2X + 1.$$

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 3$ .

1. Vérifier que  $(x^2 - 1)\omega'(x) = \omega(x)$ , pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .
2. (a) Déterminer  $\mathcal{L}(X^k)$ , pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ .  
(b) Écrire la matrice de  $\mathcal{L}$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(c) Montrer alors que l'ensemble des valeurs propres de  $\mathcal{L}$  est donné par:

$$\{\lambda_k = k(k+1), k \in \{0, \dots, n\}\}.$$

(d) En déduire que  $\mathcal{L}$  est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

3. (a) Montrer qu'il existe une unique base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  formée de vecteurs propres de  $\mathcal{L}$ , telle que  $P_k$  soit unitaire pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

(b) Montrer que  $\deg(P_k) = k$ ,  $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ .

(c) Expliciter  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

4. (a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^k \omega(x)$  est intégrable sur  $] -1, 1[$ .

(b) En déduire que  $\mathbb{R}[X] \subset \mathbf{H}$ .

5. Soit  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ .

(a) Soit  $[\alpha, \beta] \subset ] -1, 1[$ . En remarquant que  $\mathcal{L}(P) - P' = ((X^2 - 1)P')'$ , montrer que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}(P)(t)Q(t)\omega(t)dt = [(t^2 - 1)P'(t) \cdot Q(t)\omega(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\omega(t)dt.$$

(b) Démontrer alors que:

$$\langle \mathcal{L}(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}P'(t)Q'(t)dt = \langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle.$$

6. Déduire de ce qui précède que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Dans la suite de ce problème, on admettra que :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

## PARTIE IV

Dans cette partie, on considère  $I = \mathbb{R}$ ,  $\omega$  définie sur  $I$  par

$$\omega(x) = e^{-x^2},$$

$$A = 1 \quad \text{et} \quad B = -2X.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $H_n$  par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \omega^{(n)}(x),$$

où  $\omega^{(n)}$  désigne la dérivée d'ordre  $n$  de  $\omega$  si  $n \geq 1$  et  $\omega^{(0)} = \omega$ .

1. Calculer  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_2$ .

2. Montrer que  $\mathbb{R}[X] \subset \mathbf{H}$ .

3. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$ .

4. (a) Établir:  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ .

(On pourra utiliser la formule de Leibniz)

- (b) En déduire que:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ .
5. (a) Montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , que  $H_n$  est un polynôme de degré  $n$ , dont on précisera le coefficient dominant.
- (b) Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ .
6. Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  est un vecteur propre de  $\mathcal{L}$ .
7. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que, si  $P \in \mathbb{R}[X]$ , alors:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)\omega^{(n-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)\omega^{(n-1)}(x) = 0.$$

- (b) En déduire que

$$\langle H_n, H_0 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \sqrt{\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

- (c) A l'aide d'une intégration par parties convenable, montrer que:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad \langle H_n, H_m \rangle = 2m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle.$$

- (d) Montrer alors que  $(H_n)_{n \geq 0}$  est une famille orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$ , et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (e) Que vaut  $\langle H_n, H_n \rangle$  ?
- (f) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{\langle P, H_k \rangle}{2^k \cdot k! \sqrt{\pi}} H_k.$$

8. (a) Établir par récurrence:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( e^{-(x-t)^2} \right) = H_n(x-t) e^{-(x-t)^2}.$$

- (b) i. Soit  $x$  un réel fixé. Montrer sans calcul que la fonction:  $g_x : t \mapsto e^{2xt-t^2}$  est développable en série entière en la variable  $t$ , au voisinage de 0.
- ii. En déduire:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

- (c) i. Vérifier que  $\varphi : x \mapsto e^x$  est un élément de  $\mathbf{H}$ .
- ii. Montrer que  $\langle \varphi, H_n \rangle = \langle \varphi, H_{n-1} \rangle$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- iii. Calculer alors  $\langle \varphi, H_n \rangle$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- (d) Conclure, par 8.(b), que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle \varphi, H_n \rangle}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} H_n(x).$$

## PARTIE V

On désigne par  $L_c^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , continues et intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{itx} f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On définit alors

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que,  $\forall f, g \in L_c^1(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{C} : \widehat{\lambda f + g} = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}$ .

3. Montrer que  $\widehat{f}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

4. Soit  $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ . On suppose que  $h: t \mapsto tf(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que  $\widehat{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Montrer que  $(\widehat{f})' = i \cdot \widehat{h}$ .

5. Soit  $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f' \in L_c^1(\mathbb{R})$ .

(a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \widehat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{f}(x) = 0$ .

(b) Montrer que  $(\widehat{f'})(x) = -ix \widehat{f}(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

6. Soit  $\varphi_0 : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

(a) Montrer que  $\varphi_0$  vérifie les hypothèses de 3) et 4) de cette partie.

(b) Donner une équation différentielle vérifiée par  $\varphi_0$ .

(c) En déduire que  $\widehat{\varphi_0}$  vérifie une équation différentielle qu'on précisera.

(d) En déduire que  $\widehat{\varphi_0} = \sqrt{2\pi} \cdot \varphi_0$ .

7. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\varphi_n : x \mapsto H_n(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ . ( $H_n$  étant défini dans la partie IV).

(a) Donner une relation entre les fonctions  $\varphi_{n+1}$ ,  $\varphi_n$  et  $\varphi_n'$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n \in L_c^1(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_n' \in L_c^1(\mathbb{R})$  et que  $h_n : x \mapsto x\varphi_n(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

(c) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\widehat{\varphi_n} = \lambda_n \varphi_n$ , où  $\lambda_n$  est une constante à déterminer.

