Sujet de mathématiques

Exercice

1. On a $\dfrac{e^{-tx}-e^{t}}{t} \underset{t\to 0}{\backsim} 1-x$.

Donc la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{e^{-tx}-e^{t}}{t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$.

De plus $\varphi_x(t) = o_{+\infty}(t^{-2})$, pour $x>0$, donc φ_x est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

2. On note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-tx}-e^{t}}{t} \end{array}$$

f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
On montrera que F est C^1 sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
Soit $[a,1]$ un segment inclus dans $]0,1]$ et x décrivant $[a,1]$,

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-tx}-e^{t}}{t} \leq \frac{e^{-ta}-e^{t}}{t} = \varphi_a(t)$$

et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-tx} \leq e^{-ta} = \psi_a(t)$

où $\varphi_a$et ψ_a sont continues positives et intégrables sur $[0,+\infty[$.
Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ montre que F est C^1 sur $]0,1]$ et que pour tout $x \in]0,1]$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Soit $[1,b]$ un segment inclus dans $[1,+\infty[$ et x décrivant $[1,b]$,

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-t}-e^{-tx}}{t} \leq \frac{e^{-t}-e^{-tb}}{t} = -\varphi_b(t)$$

et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-tx} \leq e^{-t} = \psi_1(t)$

où $-\varphi_b$et ψ_1 sont continues positives et intégrables sur $[0, +\infty[$.
Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ montre que F est C^1 sur $[1, +\infty[$ et que pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

En conclusion F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

3. Pour $x > 0$, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = -\frac{1}{x}$.

D'où pour $x > 0$, $F(x) = -Logx + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme $F(1) = 0$ alors $\alpha = 0$ et $F(x) = -Logx$, $x > 0$.

---

4. Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t} dt$.

Le changement de variables $u = 3t$ donne

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{-2}{3}u} - e^{-u}}{u} du = F(\frac{2}{3}) = Log(\frac{3}{2}).$$

Problème

Partie I

1. Soit $P \in \mathcal{E}_n$.

$$\begin{aligned} deg(GP) &\leq \max(\deg(XP'), deg((1 - X^2)P'')) \\ &= \deg P \\ &\leq n \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{E}_n$ est stable par G.

2.a. $G_2(1) = 0$, $G_2(X) = -3X$, $G_2(X^2) = -8X^2 + 2$.
Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

b. Pour $k = 3, ..., n$, $G_n(X^k) = -k(k + 2)X^k + k(k - 1)X^{k-2}$.

D'où

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -3 & . & . & & & . \\ . & 0 & -8 & . & k(k-1) & & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & & . & -k(k+2) & 0 & n(n-1) \\ . & . & & & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & -n(n+2) \end{pmatrix}$$

c. A_n étant triangulaire supérieure, ses valeurs propores sont ses éléments diagonaux.
D'où $Sp(A_n) = \{-k(k+2),\ k = 0, ..., n\}$.

De plus, si $k(k+2) = k'(k'+2)$ alors $k = k'$.
Donc A_n admet $n+1$ valeurs propres simples, comme $A_n. \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ alors A_n est diagonalisable.

---

3. Comme A_n est diagonalisable, il existe une base de $\mathcal{E}_n$ formée de vecteurs propres de A_n.
Soit $(P_0, ..., P_n)$ une telle base où P_k est un vecteur propre associé à $\lambda_k = -k(k+2)$, $k = 0, ..., n$.

Mais alors $(1-X^2)P_k''(X) - 3XP_k'(X) + k(k+2)P_k(X) = 0 \quad (*)$.

On note $r = \deg P_k$ et $P_k = a_r X^r + ... + a_0$, $a_r \neq 0$.
Le coefficient de X^r dans $(*)$ est égal à
$-r(r-1) - 3r + k(k+2) = 0$,
d'où $k^2 + 2k - r^2 - 2r = 0$
c.à.d. $(k-r)(k+r+2) = 0$
Donc $r = k$
Ainsi $\deg P_k = k$.
Quitte à multiplier P_k par un réel non nul, on peut supposer que P_k est de coefficient dominant 2^k.
L'unicité d'une telle base provient du fait que les sous-espaces propres de A_n sont des droites vectorielles.

4.a. On a $R_k(X) = P_k(-X)$, d'où $R_k'(X) = -P_k'(-X)$ et $R_k''(X) = P_k''(-X)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} G_n R_k(X) &= -3XR_k'(X) + (1-X^2)R_k''(X) \\ &= 3XP_k'(-X) + (1-X^2)P_k''(-X) \\ &= G_n P_k(-X) \\ &= \lambda_k P_k(-X) \\ &= \lambda_k R_k(X) \end{aligned}$$

b. D'après a. $((-1)^0 R_0, (-1)^1 R_1, ..., (-1)^n R_n)$ est une base de $\mathcal{E}_n$ formée de vecteurs propres de G_n.

De plus, pour tout $k = 0, ..., n,\ \deg((-1)^k R_k) = \deg(P_k) = k$

et

(coefficient dominant de $(-1)^k R_k$)=($(-1)^k.(-1)^k$ coefficient dominant de P_k)= 2^k

L'unicité d'une telle base, provenant de la question 3, prouve alors que pour tout $k = 0, ..., n,\ P_k = (-1)^k R_k$

ou encore $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

On en déduit que P_k est de même parité que k.

Partie II

1. L'équation différentielle (E_n) est linéaire, du second ordre et homogène, les applications $x \mapsto (1-x^2)$ et $x \mapsto -3x$ étant continues sur $]-1,1[$ et l'application $x \mapsto (1-x^2)$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$, donc l'ensembles des solutions de (E_n) sur $]-1,1[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

---

2. $z(\theta) = \sin\theta\ y(\cos\theta)$.

$z'(\theta) = -\sin^2\theta\ y'(\cos\theta) + \cos\theta\ y(\cos\theta)$.

$$\begin{aligned} z''(\theta) &= \sin^3\theta y''(\cos\theta) - 3\sin\theta\cos\theta y'(\cos\theta) - \sin\theta y(\cos\theta) \\ &= \sin\theta[(1-\cos^2\theta)\ y''(\cos\theta) - 3\cos\theta y'(\cos\theta) - y(\cos\theta)] \\ &= \sin\theta[-n(n+2)-1]\ y(\cos\theta) \\ &= -(n+1)^2 z(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi z est solution de (E'_n).

---

3. La solution générale de (E'_n) sur $]0,\pi[$ est :

$z : \theta \mapsto z(\theta) = \alpha\cos[(n+1)\theta] + \beta\sin[(n+1)\theta],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La solution générale de (E_n) sur $]-1,1[$ est :

$$y : x \mapsto y(x) = \alpha\frac{\cos[(n+1)Arc\cos x]}{\sqrt{1-x^2}} + \beta\frac{\sin[(n+1)Arc\cos x]}{\sqrt{1-x^2}},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4.a. y étant polynômiale, $\lim\limits_{x \to 1^-} y(x) = y(1)$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 1^-} (\sqrt{1-x^2}\, y(x)) = 0$.

D'après 3.,

$\lim\limits_{x \to 1^-} (\sqrt{1-x^2}\, y(x)) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\alpha \cos[(n+1)Arc\cos x] + \beta \sin[(n+1)Arc\cos x]) = \alpha$

Le a. assure alors que $\alpha = 0$ et que par suite y est proportionnelle à la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin[(n+1)Arc\cos x]}{\sqrt{1-x^2}}$.

b. Remarquons d'abord que l'ensemble des solutions polynômiales de (E_n) est le sous espace propre de G associé à la valeur propre $\lambda_n = -n(n+2)$, qui est une droite vectorielle. Ce qui assure l'existence de solutions polynômiales non nulles de (E_n).

Les résultats précédents assurent alors qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathcal{E}$ tel que

$Q_n(x) = \dfrac{\sin[(n+1)Arc\cos x]}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1, 1[$.

Mais alors, $\forall \theta \in]0, \pi[$, $Q_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$.

c. $\forall \theta \in]0, \pi[$, $Q_0(\cos\theta) = 1$ et $Q_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$

d'où $\forall x \in]-1, 1[$, $Q_0(x) = 1$ et $Q_1(x) = 2x$.

Ainsi $Q_0 = 1$ et $Q_1 = 2X$.

Montrons que $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$.

On a pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} 2\cos\theta Q_{n+1}(\cos\theta) &= \frac{2\cos\theta \sin[(n+2)\theta]}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin[(n+3)\theta]}{\sin\theta} + \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} \\ &= Q_{n+2}(\cos\theta) + Q_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in]-1, 1[$, $Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)$.

Ainsi $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$.

d. On raisonne par récurrence sur n.

pour $n = 0$ et $n = 1$, on a

$\deg Q_0 = 0$, $\deg Q_1 = 1$ et le coefficient dominant de Q_0 est égal à $1 = 2^0$

On suppose que pour tout $0 \leq k \leq n+1, \deg Q_k = k$ et que le coefficient dominant de Q_k est égal à 2^k,

comme $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$ alors
$\deg Q_{n+2} = \deg(XQ_{n+1}) = 1 + \deg Q_{n+1} = n+2$ et
(le coefficient dominant de Q_{n+2})= 2.(le coefficient dominant de Q_{n+1})
$= 2.2^{n+1} = 2^{n+2}$.
En conclusion, $\deg Q_n = n$ et le coefficient dominant de Q_n vaut 2^n, pour tout n entier naturel.

e. Q_n étant solution de (E_n), il est alors vecteur propre de G associé à la valeur propre $\lambda_n = -n(n+2)$.
Comme de plus il est de degré n et de coefficient dominant 2^n, la question I.3., assure qu'il vaut P_n.

---

5. a. P_n étant un polynôme, il est continu en 1, d'où,

$$P_n(1) = \lim_{x\to 1^-} P_n(x) = \lim_{\theta\to 0^+} P_n(\cos\theta) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = n+1.$$

D'après I.4.b. $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$,
d'où $P_n(-1) = (-1)^n(n+1)$.

b. Les solutions de $\sin[(n+1)\theta] = 0$, $\theta \in]0,\pi[$ sont

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \text{ où } k = 1, ..., n.$$

On note $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n+1})$, $k = 1, ..., n$.

Puisque $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}, \forall\theta \in]0,\pi[$,
alors $P_n(x_k) = 0$, $k = 1, ..., n$.
Par ailleurs, l'application $x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, ce qui assure que $x_1, x_2, ..., x_n$ sont distincts deux à deux et sont racines de P_n.
Ainsi P_n, qui est de degré n, admet n racines, $x_k, k = 1, ..., n$, distinctes deux à deux.
Ce sont alors les seules racines de P_n et elles sont simples et situées dans $]-1,1[$.

c.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(\cos\theta) &= \frac{\sin[(n+2)\theta]}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin[(n+1)\theta]\cos\theta + \cos[(n+1)\theta]\sin\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}\cos\theta + \cos[(n+1)\theta] \\
&= P_n(\cos\theta)\cos\theta + \cos((n+1)\theta)
\end{aligned}$$

d. Une récurrence sur n donne le résultat.

Partie III

1. Pour $\theta \in [0,\pi]$, $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$.

Donc $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$ si et seulement si $\lambda = \cos\theta$ et $\sin^2\theta = 0$

si et seulement si $\lambda = \pm 1$.

Comme $|\lambda| < 1$ alors $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 \neq 0$

Ainsi f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2.a. f est paire donc $b_n = 0$.

b. $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2}$.

Pour $u = tg\dfrac{\theta}{2}$, $du = \dfrac{1+u^2}{2}d\theta$ et $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2du}{(1+u^2)\left(1+\lambda^2 - 2\lambda\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2du}{(1+\lambda)^2u^2 + (\lambda-1)^2} \\
&= \frac{4}{\pi(1+\lambda)^2}\int_0^{+\infty} \frac{2du}{u^2 + \left(\dfrac{\lambda-1}{1+\lambda}\right)^2} \\
&= \frac{4}{\pi(1+\lambda)^2}\left[\frac{\lambda+1}{1-\lambda}Arctg\left[\frac{\lambda+1}{1-\lambda}u\right]\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{4}{\pi(1-\lambda^2)}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2}{1-\lambda^2}
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}.\frac{1}{-2\lambda}\int_0^{\pi} \frac{-2\lambda\cos\theta+(1+\lambda^2)-(1+\lambda^2)}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2} d\theta \\ &= \frac{-1}{\lambda\pi}\int_0^{\pi}\left[1-(1+\lambda^2)f(\theta)\right]d\theta \\ &= \frac{-1}{\lambda}+\frac{(1+\lambda^2)}{2\lambda}a_0 \end{aligned}$$

d. $\lambda a_{n+2}-(1+\lambda^2)a_{n+1}+\lambda a_n$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \lambda(\cos[(n+2)\theta]+\cos n\theta)-(1+\lambda^2)\cos[(n+1)\theta]]f(\theta)d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [2\lambda\cos[(n+1)\theta]\cos\theta-(1+\lambda^2)\cos[(n+1)\theta]]f(\theta)d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\cos[(n+1)\theta]d\theta$$

$= 0.$

e. L'équation $\lambda x^2-(1+\lambda^2)x+\lambda=0$ admet deux solutions réelles distinctes λ et $\dfrac{1}{\lambda}$.

Donc il existe deux réels α et β tels que

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\alpha\lambda^n+\beta\dfrac{1}{\lambda^n}.$

Mais

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{1-\lambda^2} \\ a_1 = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \dfrac{2}{1-\lambda^2} \\ \alpha\lambda+\beta\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2} \end{cases}$$

Donc $\alpha=\dfrac{2}{1-\lambda^2}$ et $\beta=0.$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}.$

3. a. f étant C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

b. La convergence normale de la série de Fourier de f assure la convergence absolue des séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

Comme $|a_{n+1}\sin(n\theta)| \leq |a_{n+1}|$ et $|a_{n-1}\sin(n\theta)| \leq |a_{n-1}|$, on en déduit que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} a_{n+1}\sin(n\theta)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} a_{n-1}\sin(n\theta)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

c. D'après 3. a. ,

$\forall\theta \in [0,\pi]$, $f(\theta) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} a_n\cos(n\theta)$

D'où

$$\lambda f(\theta)\sin\theta = \frac{\lambda a_0}{2}\sin\theta + \lambda\sum_{n\geq 1} a_n \sin\theta\cos(n\theta)$$

$$= \frac{\lambda a_0}{2}\sin\theta + \frac{\lambda}{2}\sum_{n\geq 1} a_n(\sin(n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\lambda a_0}{2}\sin\theta + \frac{\lambda}{2}\sum_{n\geq 1} a_n\sin((n+1)\theta) - \frac{\lambda}{2}\sum_{n\geq 1} a_n\sin((n-1)\theta)$$

$$= \frac{\lambda a_0}{2}\sin\theta + \frac{\lambda}{2}\sum_{n\geq 2} a_{n-1}\sin(n\theta) - \frac{\lambda}{2}\sum_{n\geq 0} a_{n+1}\sin(n\theta)$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\sum_{n\geq 1} a_{n-1}\sin(n\theta) - \sum_{n\geq 0} a_{n+1}\sin(n\theta)\right]$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{\lambda}{2}\sum_{n\geq 1}(a_{n-1} - a_{n+1})\sin(n\theta)$$

Or $a_{n-1} - a_{n+1} = \dfrac{2\lambda^{n-1} - 2\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2} = 2\lambda^{n-1}$.

D'où $\lambda f(\theta)\sin\theta = \sum\limits_{n\geq 1}\lambda^n\sin(n\theta)$.

$(*)$ et $(**)$ sont justifiées par la convergence de toutes les séries qui interviennent dans ces égalités.

Ainsi $\forall\theta \in [0,\pi]$, $g(\theta) = \sum\limits_{n\geq 1}\lambda^n\sin(n\theta)$.

d. $\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$, $\sin\theta \neq 0$

D'où

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n\geq 1} \lambda^{n-1} \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \\ &= \sum_{n\geq 0} \lambda^{n} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \\ &= \sum_{n\geq 0} \lambda^{n} P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

e. Les séries $\sum_{n\geq 0}(n+1)\lambda^n$ et $\sum_{n\geq 1}(n+1)(-\lambda)^n$ sont des séries entières de rayon de convergence 1, comme $|\lambda| < 1$, ces deux séries convergent.

De plus,

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)\lambda^n = \sum_{n\geq 0}\left(\lambda^{n+1}\right)' \overset{(1)}{=} \left(\sum_{n\geq 0}\lambda^{n+1}\right)'$$

$$= \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)' = \frac{1}{(1-\lambda)^2}$$

et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n+1)(-\lambda)^n = -\sum_{n\geq 0}\left((-\lambda)^{n+1}\right)' \overset{(2)}{=} -\left(\sum_{n\geq 0}(-\lambda)^{n+1}\right)'$

$$= \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)' = \frac{1}{(1+\lambda)^2}$$

Les égalités (1) et (2) sont justifiées par la convergence normale des séries $\sum_{n\geq 0}\lambda^n$ et $\sum_{n\geq 1}(-\lambda)^n$ sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.

Pour $\theta = 2k\pi$, $P_n(\cos\theta) = 1+n$ et

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)\lambda^n = \frac{1}{(1-\lambda)^2} = f(2k\pi)$$

Pour $\theta = (2k+1)\pi$, $P_n(\cos\theta) = (-1)^n(1+n)$ et

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)(-\lambda)^n = \frac{1}{(1+\lambda)^2} = f((2k+1)\pi).$$

Ce qui prouve que

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \sum_{n\geq 0}\lambda^n P_n(\cos\theta)$.

f. On a pout tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda^n P_n(\cos\theta)| \leq |\lambda|^n (n+1)$.

Comme les séries $\sum\limits_{n\geq 0}(n+1)\lambda^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1}(n+1)(-\lambda)^n$ sont convergentes alors la série $\sum\limits_{n\geq 0}\lambda^n P_n(\cos\theta)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

4.a. $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)$ est divergente.

b. La question précédente montre que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)z^n$ est inférieur ou égal à 1.

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$, $|P_n(\cos\theta)| \leq (n+1)$.

Comme la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(n+1)z^n$ est de rayon de convergence 1, on en déduit que $R \geq 1$.

Finalement $R = 1$.

c. Si $x = 0$ alors $\sum\limits_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)x^n = 1$

Si $0 < |x| < 1$

alors $\sum\limits_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)x^n = \dfrac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$

et ceci d'après les résultats de la question précédente.

Partie IV

1. a. $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\right]$

$= -3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P'(x) + (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x)$

$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left[-3xP'(x) + (1-x^2)P''(x)\right]$

$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(GP)(x)$.

b. $(GP/Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(GP)(x)Q(x)dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\right]dx$

Par intégration parties on obtient

$$(GP/Q) = \Big[Q(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} Q'(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)dx.$$

Cette dernière expression présente une symétrie par rapport à P et Q

d'où $(GP/Q) = (P/GQ)$.

c. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $m \neq n$

$(GP_n/P_m) = (P_n/GP_m)$

d'où $\lambda_n(P_n/P_m) = \lambda_m(P_n/P_m)$ où $\lambda_n = -n(n+2)$

Comme $\lambda_n \neq \lambda_m$ alors $(P_n/P_m) = 0$.

Ainsi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans $\mathcal{E}$.

d. $||P_n||^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(P_n(x))^2dx.$

Pour $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta d\theta$ et on a

$$\begin{aligned} ||P_n||^2 &= \int_0^{\pi} \sin^2\theta(P_n(\cos\theta))^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2((n+1)\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2(n+1)\theta)}{2}d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

D'où $||P_n|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

---

2. a. $d_n(g) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(P_n/g) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}P_n(x)g(x)dx.$

Pour $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta d\theta$ et on a

$$
\begin{aligned}
d_n(g) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} \sin^2\theta(P_n(\cos\theta))g(\cos\theta)d\theta \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} \sin\theta\sin((n+1)\theta)g(\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(\theta)\sin((n+1)\theta)d\theta \\
&= b_{n+1}(h)
\end{aligned}
$$

b. h est 2π- périodique, impaire alors

$$a_n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(\theta)\cos(n\theta)d\theta = 0.$$

Comme elle est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet assure la convergence sur $\mathbb{R}$, de sa série de Fourier vers h.

Ainsi $\forall\theta \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
h(\theta) &= \sum_{n\geq 1} b_n(h)\sin(n\theta) \\
&= \sum_{n\geq 0} b_{n+1}(h)\sin((n+1)\theta)
\end{aligned}
$$

D'où $\forall\theta \in]0,\pi[$, $g(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n\geq 0} d_n(g)P_n(\cos\theta)$

ou encore $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n\geq 0} d_n(g)P_n(x)$.

c. D'après l'égalité de Parseval, $\sum_{n\geq 1}(b_n(h))^2$ converge et $\sum_{n\geq 1}(b_n(h))^2 = 2\,||h||_2^2$.

D'où

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}(b_{n+1}(h))^2 &= \sum_{n\geq 0}(d_n(g))^2 \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(h(\theta))^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\sin^2\theta(g(\cos\theta))^2 d\theta \\
&= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(g(x))^2 dx \\
&= ||g||^2
\end{aligned}
$$

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n P_n| \leq |\alpha_n|\,(n+1)$ sur $[-1,1]$.

Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n(n+1)$ est absolument convergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n P_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

b. $g = \sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n P_n$ est continue sur $[-1,1]$ et

$$\begin{aligned}
(P_q/g) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} P_q(x) \left(\sum_{n\geq 0} \alpha_n P_n(x)\right) dx \\
&= \sum_{n\geq 0} \alpha_n (P_q/P_n) \\
&= \alpha_q \, ||P_q||^2
\end{aligned}$$

D'où $\alpha_q = \dfrac{2}{\pi}(P_q/g) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} d_q(g)$.