Correction du Concours Physique Chimie

Epreuve de Mathématiques

Session : Juin 2006

Exercice

1. a. On raisonne par récurrence sur p.

La propriété est vraie pour $p = 1$ de part la définition de J.

On suppose la propriété vérifiée au rang p, $p \leq n-1$.
Pour $p+1 \leq n-1$,

$$u^{p+1}(e_k) = \begin{cases} u(e_{k+n-p}) = e_{k+n-p-1} & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ u(e_{k-p}) = e_{k-p-1} & \text{si } p+2 \leq k \leq n \end{cases}$$

Comme $u^{p+1}(e_{p+1}) = e_n$, la propriété est alors vérifiée au rang $p+1$.
En conclusion, pour tout $p = 1, 2, \dots n-1$,

$$u^p(e_k) = \begin{cases} e_{k+n-p} & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ e_{k-p} & \text{si } p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

---

1. b. D'après la question précédente,

$$u^{n-1}(e_k) = \begin{cases} e_{k+1} & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ e_1 & \text{si } k = n \end{cases}, \text{ or } u(e_k) = \begin{cases} e_{k-1} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ e_n & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

D'où, $u^n(e_k) = e_k$, pour $k = 1, 2, \dots, n$.
Ainsi $J^n = I_n$.

Aussi, la question précédente montre que $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ et par suite on aura

$$A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}.$$

---

2. a. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_0 I_n + \alpha_1 J + \ldots + \alpha_{n-1} J^{n-1} = 0$,

alors la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}$ est nulle, ce qui prouve que

$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ et par suite que la famille $(I_n, J, \ldots J^{n-1})$ est libre.

---

2. b. Soit $P = \alpha_{n-1} X^{n-1} + \alpha_{n-2} X^{n-2} + \ldots + \alpha_0$ un polynôme annulant J.
Donc $\alpha_0 I_n + \alpha_1 J + \ldots + \alpha_{n-1} J^{n-1} = 0$ et par suite $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ car la famille $(I_n, J, \ldots J^{n-1})$ est libre et $P = 0$.
Ainsi il n'existe pas de polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ annulant J.

---

2. c. Comme $X^n - 1$ annule J, alors $Sp(J) \subset \{\omega^k, k = 0, \ldots n-1\}$.
Réciproquement,
s'il existe $k \in \{0, \ldots n-1\}$ tel que $\omega^k \notin Sp(J)$ alors $(J - \omega^k I_n)$ est inversible.
Or $J^n - I_n = 0$, d'où $(J - \omega^0 I_n)(J - \omega^1 I_n)\ldots(J - \omega^k I_n)\ldots(J - \omega^{n-1} I_n) = 0$,
produit qui est commutatif.
Mais alors,
$(J - \omega^0 I_n)(J - \omega^1 I_n)\ldots(J - \omega^{k-1} I_n)(J - \omega^{k+1} I_n)\ldots(J - \omega^{n-1} I_n) = 0$.
Ce qui contredit le **2. b.** et donc $\omega^k \in Sp(J)$ pour tout $k \in \{0, \ldots n-1\}$.
Ainsi $Sp(J) = \{\omega^k, k = 0, \ldots n-1\}$ et par suite $P_J = (-1)^n (X^n - 1)$.

---

3. Soit $k \in \{0, \ldots n-1\}$. On a $J - \omega^k I_n = \begin{pmatrix} -\omega^k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\omega^k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\omega^k \end{pmatrix}$

Donc $C_1 + \omega^k C_2 + \omega^{2k} C_3 + \ldots + \omega^{(n-1)k} C_n = 0$, où $C_1, C_2, \ldots C_n$ sont les colonnes de $J - \omega^k I_n$.

Ainsi, $u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(J - \omega^k I_n)$ qui est une droite vectorielle,

car ω^k est une valeur propre simple de J, donc u_k engendre $\operatorname{Ker}(J - \omega^k I_n)$.
D'où $(u_0, u_1, \ldots u_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formées de vecteurs propres de J.
Finalement,
$D = Q^{-1} J Q$ et $P(D) = Q^{-1} A Q$, où $D = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1})$,
$Q = (u_0, u_1, \ldots u_{n-1})$, $P = a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \ldots + a_0$ et
$P(D) = \operatorname{diag}(P(1), P(\omega), P(\omega^2), \ldots P(\omega^{n-1}))$.

4. $\det A = \det(P(D)) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$. Mais,

$$P(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(r+1)x^r = (\sum_{r=0}^{n-1} x^{r+1})' = \left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}, \text{ pour } x \neq 1.$$

et $P(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi, pour $k = 1, 2, \dots n-1$, $P(\omega^k) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}$ et $\det A = \dfrac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega^k-1)}$.

D'autre part, $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega^k - 1) = n(-1)^{n-1}$ car $\omega^k - 1$, $k = 1, 2, \dots n-1$,

sont les racines non nulles du polynôme $(x+1)^n - 1$.

En conclusion, $\det A = (-1)^{n-1} n^{n-1} \dfrac{n+1}{2}$.

Problème

Partie I

I.1.1. $\forall P \in F$, $T(P)(X) = P(X+1) - P(X)$. Donc $T(P) \in F$.

I.1.2. Si $\deg(P) \leq 0$ alors P est constant et $T(P) = 0$, d'où $\deg(T(P)) = -\infty$
Si $\deg(P) = n$, $n \in IN^*$ alors $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$,
où $a_n, a_{n-1} \dots a_0 \in IR$ et $a_n \neq 0$. D'où $\deg(T(P)) \leq n-1$ avec coefficient de X^{n-1} dans $T(P) = n\, a_{n-1}$ qui n'est pas nul. Ainsi $\deg(T(P)) = \deg(P) - 1$.

I.2.1. Soit $P \in F$ tel que $\Delta(P) = 0$. Alors $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ et donc $P \in F_0$.
Réciproquement, il est clair que si P est constant alors $\Delta(P) = 0$.
Finalement $\operatorname{Ker}\Delta = F_0$.

I.2.2. 0 est valeur propre de Δ puisque $\operatorname{Ker}\Delta = F_0$.
Soit λ une valeur propre de Δ et P un vecteur propre associé. Ainsi $\Delta(P) = \lambda P$.
Si $\lambda \neq 0$ alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P)$, ce qui n'est réalisé que pour $P = 0$.
Mais $P \neq 0$ car c'est un vecteur propre de Δ, donc $\lambda = 0$.
Finalement, Δ admet 0 pour unique valeur propre et l'espace propre associé est F_0.

I.3.1. Pour cause de degrés, on a trivialement $\Delta(F_n) \subset F_{n-1}$.
Si on désigne par Δ_n l'endomorphjsme de F_n induit par Δ alors le théorème du rang prouve que $\dim(\Delta(F_n)) = \dim(F_n) - \dim(\ker \Delta_1) = n$.
Ainsi $\dim(\Delta(F_n)) = \dim(F_{n-1})$ et donc $\Delta(F_n) = F_{n-1}$.

I.3.2. Si on désigne par Δ_2 la restriction de Δ à G_n sur F_{n-1}, alors Δ est injective puisque de noyau réduit à $\{0\}$. Comme de plus $\dim(G_n) = \dim(F_{n-1})$ alors Δ_2 est un isomorphisme.

I.3.3. Après calculs, on obtient $A(X) = \dfrac{X^2(X-1)^2}{4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

I.4.1. $\operatorname{Ker} T = C_1$.

I.4.2. On a :

$$\begin{aligned}
f \in \ker\theta &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \theta(f)(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\theta(f))'(x) = 0 \text{ et } \theta(f)(1) = 0\\
&\Leftrightarrow T(f) = 0 \text{ et } \theta(f)(1) = 0\\
&\Leftrightarrow f \in \operatorname{Ker} T \text{ et } \theta(f)(1) = 0
\end{aligned}$$

I.4.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e_k \in C_1$ et $\int_0^1 e_k(t)\,dt = 0$ donc $e_k \in \ker\theta$
Par ailleurs, pour tous $k, p \in \mathbb{N}^*$,
$\langle e_k | e_p \rangle = \int_0^1 [\cos(2\pi(p+k)t) + \cos(2\pi(p-k)t)]\,dt$ Or $\int_0^1 \cos(2\pi(p+k)t)\,dt = 0$
et $\int_0^1 \cos(2\pi(p-k)t)\,dt = \delta_{kp}$, d'où $\langle e_k | e_p \rangle = \delta_{kp}$.
Ainsi $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de $\operatorname{Ker}\theta$ qui n'est donc pas de dimension finie.

I.5.1. Une récurrence sur n donne le résultat.

I.5.2. La question précédente montre qu'il suffit de définir f continue sur $]0,1]$ et telle que $\lim\limits_{0^+}(f+g)$ existe et vaut $f(1)$, assurant ainsi la continuité de f en n, $n \in \mathbb{N}^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\lim\limits_{0^+} g$ existe alors la fonction f coïncidant sur $]0,1]$ avec la fonction affine h

vérifiant $h(0) + \lim\limits_{0^+} g = h(1)$ répond au problème.

Si $\lim\limits_{0^+} g$ n'existe pas, alors la fonction $f = h - g$ sur $]0,1]$, où h est la fonction la

fonction affine vérifiant $h(1) = g(1) + h(0)$, répond au problème.
Ainsi T est surjective.

I.5.3. L'application $\varphi : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur IR_+^* car f est continue sur IR_+^*.

D'où $\theta(f)$ qui est l'application $x \mapsto \varphi(x+1) - \varphi(x)$, est de classe C^1 sur IR_+^*.
θ n'est pas surjective car l'application $x \mapsto |x-1|$, qui n'est pas de classe C^1 sur IR_+^*, n'admet pas d'antécédents par θ.
Im θ est l'espace des fonctions de classe C^1 sur IR_+^* à valeurs dans IR.

Partie II

II.1.1. $\forall x \geq 0$, $u_n(x) = \dfrac{x}{n} - \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$ terme général d'une série convergente. $\sum u_n$ converge donc simplement sur IR_+.

II.1.2. On a déjà vu que $\sum u_n$ converge simplement sur IR_+.
Pour tout $n \in IN^*$, la fonction u_n est C^1 sur IR_+.

$u_n'(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n(x+n)}$. Pour tout segment $[0, b]$ de IR_+,

$|u_n'(x)| \leq \dfrac{b}{n^2}$ terme général d'une série convergente.

$\sum u'_n$ converge donc normalement sur tout segment de IR_+

D'où S est de classe C^1 sur IR_+ et $\forall x \geq 0$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$.

II.1.3.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\theta(u_n)(1) = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N}\left[-(n+2)\mathrm{Log}(n+2)+(n+1)\mathrm{Log}(n+1)+\mathrm{Log}(n+1)\right]$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\mathrm{Log}(n+1)-\mathrm{Log}\, n\right)$$

$$+2\,\mathrm{Log}\,2+\mathrm{Log}(N!)+N-(N+2)\,\mathrm{Log}(N+2)$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}u_n(1)+\frac{3}{2}\mathrm{Log}(N+1)+2\,\mathrm{Log}\,2+\mathrm{Log}(N!)+N-(N+2)\,\mathrm{Log}(N+2).$$

II.1.3.2. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\theta(S)(1) = \frac{3}{2}\gamma + 2\,\mathrm{Log}\,2 + \lim_{N\to+\infty}\mathrm{Log}\left[\frac{(N+1)^{\frac{3}{2}}\,e^{N}\,N!}{(N+2)^{N+2}}\right].$$

Or, $\displaystyle\frac{(N+1)^{\frac{3}{2}}\,e^{N}\,N!}{(N+2)^{N+2}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,e^{-2}.$

D'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\mathrm{Log}\left[\frac{(N+1)^{\frac{3}{2}}\,e^{N}\,N!}{(N+2)^{N+2}}\right] = \mathrm{Log}\sqrt{2\pi}-2.$

Et donc, $\theta(S)(1) = \dfrac{3}{2}\gamma + 2\,\mathrm{Log}\,2 + \mathrm{Log}\sqrt{2\pi} - 2.$

II.2.1.1. $\forall\, x > 0,\ \theta(f_1)(x) = \theta(f_2)(x) = \mathrm{Log}(x) \Rightarrow \theta(\delta)(x) = 0 \Rightarrow \delta \in \mathrm{Ker}\,\theta.$

$\Rightarrow \delta \in C_1$ d'après I.4.1. et donc $\forall\ x \in \left]0,1\right]$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta(x) = \delta(x+n) \quad \text{et} \quad \delta(n) = \delta(1).$$

II.2.1.2. Notons que $\forall\, x > 0$,

$$\theta(f_1)(x) = \theta(f_2)(x) = \mathrm{Log}(x) \Rightarrow f_1(x+1)-f_1(x) = f_2(x+1)-f_2(x) = \frac{1}{x}.$$

$\forall\ x \in \left]0,1\right]$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

$\delta(x)-\delta(1) = \delta(x+n)-\delta(n) = f_1(x+n)-f_1(n)-(f_2(x+n)-f_2(n)).$

Comme f_1 et f_2 sont croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient ,

$$\delta(x)-\delta(1) \le f_1(x+n)-f_1(n) \le f_1(1+n)-f_1(n) = \frac{1}{n}.$$

$$\delta(x)-\delta(1) \ge -(f_2(x+n)-f_2(n)) \ge -(f_2(1+n)-f_2(n)) = -\frac{1}{n}.$$

$$\text{D'où : } -\frac{1}{n} \le \delta(x)-\delta(1) \le \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\delta(x) = \delta(1)$, $\forall x > 0$.

Et par suite $f_1 = f_2 + \delta(1)$ et donc $\forall x > 0$, $\theta(f_1)(x) = \theta(f_2)(x) + \delta(1)$

Ou encore, $\text{Log}\, x = \text{Log}\, x + \delta(1)$. D'où $\delta(1) = 0$ et $f_1 = f_2$.

II.2.2. Montrons que la fonction S est C^2 sur IR_+.

$\sum u_n$ converge simplement sur IR_+

$\sum u'_n$ converge donc normalement sur tout segment de IR_+

Pour tout $n \in IN^*$, la fonction u_n est C^2 sur IR_+.

$$u''_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ terme général d'une série convergente .}$$

$\sum u''_n$ converge donc normalement sur IR_+.

D'où S est de classe C^2 sur IR_+ et $\forall x \geq 0$, $S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0$.

f est donc C^1 sur IR_+^* et $f'(x) = \frac{1}{x^2} - S''(x) \geq 0$ donc f est croissante sur IR_+^*

$$\theta(f)(x) = \int_x^{x+1} \left(-\gamma - \frac{1}{t} + S'(t)\right) dt$$
$$= -\gamma - \text{Log}(x+1) + \text{Log}\, x + S(x+1) - S(x)$$

Or, $S(x+1) - S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \text{Log}(1+\frac{x+1}{n}) + \text{Log}(1+\frac{x}{n}) \right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \text{Log}(n+1+x) + \text{Log}(n+x) - \text{Log}(1+\frac{1}{n}) + \text{Log}(1+\frac{1}{n}) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \text{Log}(1+\frac{1}{n}) \right]$$
$$+ \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[-\text{Log}(n+1+x) + \text{Log}(n+x) - \text{Log}(n) + \text{Log}(1+n) \right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \text{Log}(1+\frac{1}{n}) \right] + \lim_{N\to+\infty} \left[-\text{Log}(N+1+x) + \text{Log}(x+1) + \text{Log}(N+1) \right]$$
$$= \gamma + \text{Log}(x+1).$$

D'où $\forall x \in]0,+\infty[$, $\theta(f)(x) = \text{Log}(x)$.

Conclusion : la fonction f est l'unique élément de E vérifiant **(1)**.

II.3.1. si g vérifie **(2)** alors g' est croissante sur IR_+^* et $\theta(g)'(x) = \theta(g')(x) = \text{Log}(x)$
g' vérifie alors (1).

II.3.2. g est C^1 sur $]0,+\infty[$, $g' = f$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $g(1)=0$.

$$\theta(g)'(x) = \theta(g')(x) = \mathrm{Log}(x) \Rightarrow \theta(g)(x) = x\,\mathrm{Log}(x) - x + c$$

avec $c = \theta(g)(1) + 1 = \int_1^2 (-\gamma t - \mathrm{Log}\,t + S(t))\,dt + 1$

$$= \left[-\frac{1}{2}\gamma t^2 - t\,\mathrm{Log}\,t + t\right]_1^2 + \theta(S)(1) + 1$$

$$\overset{\text{II.1.3 2.}}{=} \mathrm{Log}\sqrt{2\pi}\,.$$

II.4.1. $\forall x > 0$, $\mathrm{Log}(\psi_n(x)) = x\,\mathrm{Log}\,n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Log}\,k - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Log}(x+k)$

$$= x \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right) - \mathrm{Log}\,x - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Log}\left(1+\frac{x}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k}.$$

$$= -x\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k} - \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]\right) - \frac{x}{n} - \mathrm{Log}\,x + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k} - \mathrm{Log}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]$$

$$\underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -\gamma x - \mathrm{Log}\,x + S(x) = g(x).$$

II.4.2.1. $h : t \to (1-t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$.

Au $V(0)$, $h(t) \sim t^{x-1} \in L^1(]0,1])$ ssi $1-x<1$ ssi $x>0$.

$DI_n = \mathbb{R}_+^*$.

II.4.2.2. Le changement de variable $u = t\,n$ donne

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $n^x I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{x-1}\,du$.

II.4.2.3. Une intégration par parties donne $I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$.

Par itérations on obtient

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)} I_1(x+n-1) \text{ avec}$$

$$I_1(x+n-1) = \int_0^1 (1-t)t^{x+n-2}\,dt = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n} = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$

On obtient alors $I_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

II.5.1. $i : (x,t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = (\operatorname{Log} t)\, e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$

$|i(x,t)| \leq e^{-t}t^{a-1} + e^{-t}t^{b-1} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$

$\left|\frac{\partial i}{\partial x}(x,t)\right| \leq (\operatorname{Log} t)(e^{-t}t^{a-1} + e^{-t}t^{b-1}) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$

Γ est C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Log}(t)\, e^{-t}t^{x-1}dt$.

II.5.2. $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\chi_{]0,n]}\,dt = n^x I_n(x) = \psi_n(x)$.

Les fonctions $j_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\chi_{]0,n]}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

La suite de fonctions $(j_n(t))$ converge simplement vers $j(t) = e^{-t}t^{x-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $|j_n(t)| \leq j(t) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Le théorème de la convergence dominée donne

$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x) = \exp(g(x))$.

II.5.3. $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{g'(x)\exp(g(x))}{\exp(g(x))} = g'(x) = f(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + S'(x)$.

$\frac{1}{1-(\frac{-x}{n})}$

II.5.4. On a $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^k}x^k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k\right).$$

D'où $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k\right)$.

II.5.5.1. $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\xi(k+1)\,x^k$ est une série entière de rayon de convergence 1.

En effet, $1 \leq \xi(k+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II.5.5.2. $$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}\right)x^k$$

$$= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\xi(k+1)\ x^k.$$

$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\xi(k+1)\ x^k$ est une série entière de rayon de convergence 1.

En intégrant terme à terme l'expression précédente, on obtient :

$$\Gamma(x) = \lambda \exp(-\gamma x - \text{Log}\, x + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1}\zeta(k+1))$$

$$= \frac{\lambda}{x}\exp(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k))$$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) = \lambda \exp(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k)).$$

En faisant tendre x vers 0 , on trouve $\lambda = 1$.

On obtient alors $\Gamma(x+1) = \exp(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k))$

où $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$.

II.5.6. En dérivant l'expression précédente on obtient

$$\Gamma'(x+1) = (-\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\xi(k+1)\ x^k)\exp(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\zeta(k))$$

$$= \int_0^{+\infty}\text{Log}(t)\,e^{-t}\,t^x\,dt \quad \text{d'après II.5.1.}$$

En faisant tendre x vers 0 , on trouve $\int_0^{+\infty}\text{Log}(t)\,e^{-t}\,dt = -\gamma$.