Correction du Concours Physique Chimie
Epreuve de Mathématiques
Session : Juin 2007

Partie I

I.1. $f : x \to (1+x)^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est continue sur $]-1, 1[$

Au $V(1)$, $f(x) \sim \dfrac{2^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} \in L^1([0,1[)$ ssi $1-b<1$ ssi $b>0$.

Au $V(-1)$, $f(x) \sim \dfrac{2^{b-1}}{(1+x)^{1-a}} \in L^1(]-1,0])$ ssi $1-a<1$ ssi $a>0$.

Conclusion : $I_{a,b}$ existe ssi $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

I.2. Par le changement de variable $t = \dfrac{1+x}{2}$, il vient que $I_{a,b} = 2^{a+b-1}\beta(a,b)$.

I.3.1. Par le changement de variable $u = 1-t$, il vient que $\beta(a,b) = \beta(b,a)$.

I.3.2. $\beta(a+1,b) + \beta(a,b+1) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}(t+1-t)\,dt = \beta(a,b)$.

I.3.3. Une intégration par parties donne $b\,\beta(a+1,b) - a\,\beta(a,b+1) = 0$.

I.3.4. I.3.2. et I.3.3. donnent $\beta(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}\,\beta(a,b)$.

I.3.5.
$$\begin{aligned} I_{a+1,b+1} &= 2^{a+b+1}\beta(a+1,b+1) = \frac{a}{a+b+1}\,2^{a+b+1}\beta(a,b+1) \\ &= \frac{a}{a+b+1}\,2^{a+b+1}\beta(b+1,a) = \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+1}\,2^{a+b+1}\beta(b,a) \\ &= \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+1}\,4.2^{a+b-1}\beta(a,b) = \frac{4ab}{(a+b)(a+b+1)}\,I_{a,b}. \end{aligned}$$

I.3.6. $I_{n+1,n+1} = \dfrac{4n^2}{(2n)(2n+1)} I_{n,n}$ et $I_{1,1} = 2$, il vient donc par récurrence

$$I_{n+1,n+1} = \frac{2.4^n.(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

I.4.1. $n^a \beta(a,n+1) = n^a \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^n dt$, on pose $u = nt$.

$$= \int_0^n u^{a-1}(1-\frac{u}{n})^n du = \int_0^{+\infty} u^{a-1}(1-\frac{u}{n})^n \chi_{]0,n]} du .$$

On pose $f_n(u) = u^{a-1}(1-\frac{u}{n})^n \chi_{]0,n]}$. f_n continue sur IR_+^* et converge simplement vers $f : u \to u^{a-1}e^{-u}$ continue sur IR_+^*.

De plus, $\left| f_n \right| \leq f(u) \in L^1(IR_+^*)$ donc d'après le théorème de convergence dominée, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a \beta(a,n+1) = \int_0^{+\infty} u^{a-1}e^{-u}du = \Gamma(a)$.

I.4.2. $n^b \beta(a+n+1,b) = n^b \beta(b,a+n+1) = n^b \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{n+a} dt$, on pose $u = nt$.

$$= \int_0^n u^{b-1}(1-\frac{u}{n})^{n+a} du = \int_0^{+\infty} u^{b-1}(1-\frac{u}{n})^{n+a} \chi_{]0,n]} du .$$

On pose $g_n(u) = u^{b-1}(1-\frac{u}{n})^{n+a}\chi_{]0,n]}$. g_n continue sur IR_+^* et converge simplement vers $g : u \to u^{b-1}e^{-u}$ continue sur IR_+^*.

De plus, $\left| g_n \right| \leq g(u) \in L^1(IR_+^*)$ donc d'après le théorème de convergence dominée, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^b \beta(a+n+1,b) = \int_0^{+\infty} u^{b-1}e^{-u}du = \Gamma(b)$.

I.4.3. Par des intégrations par parties successives , il vient que :

$\beta(a,n+1) = \dfrac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}$, $\beta(a+b,n+1) = \dfrac{n!}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n)}$

$\beta(a+n+1,b) = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n)} \beta(a,b)$.

D'où : $\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a\beta(a,n+1).n^b\beta(a+n+1,b)}{n^{a+b}\beta(a+b,n+1)} = \beta(a,b)$.

I.4.4. Pour $a = b = \frac{1}{2}$, $(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$ et donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Partie II

II.1.1. Par le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$, il vient que

$$\beta(a,1-a) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}.$$

II.1.2. $\beta(a,1-a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{1-a}(1+u)} + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}.$

Par le changement de variable $v = \dfrac{1}{u}$, il vient que

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)} = \int_0^1 \frac{dv}{v^a(1+v)} = J(1-a).$$

D'où $\beta(a,1-a) = J(a) + J(1-a)$ où $J(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}$.

II.1.3. $\dfrac{1}{u^{1-a}(1+u)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} h_k(u)$ où $h_k(u) = (-1)^k u^{k-1+a}$.

h_k est continue, $h_k \in L^1(]0,1[)$, $\sum h_k$ converge simplement sur $]0,1[$ est sa somme est continue. Pour tout entier n ,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} h_k(u)\right| = \frac{|1-(-u)^{n+1}|}{u^{1-a}(1+u)} \le \frac{1+u^{n+1}}{u^{1-a}(1+u)} \le \frac{u}{u^{1-a}(1+u)} \le \frac{1}{u^{1-a}} \in L^1(]0,1[).$$

D'où d'après le théorème de convergence dominée,

$$J(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 h_k(u)\,du = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} h_k(u)\,du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+a}.$$

II.1.4. $\beta(a,1-a) = J(a) + J(1-a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-a}$

$$= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

II.2.1. f_a étant paire $b_n(f_a) = 0$, et $a_n(f_a) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(at)\cos(nt)\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos[(a+n)t]+\cos[(a-n)t])\,dt = (-1)^n \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)$

$= \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$.

D'où $SF(f_a)(t) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{a^2-n^2}\right]$.

f_a est continue, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux donc la série de Fourier converge normalement sur IR et admet f_a pour somme.

II.2.2. Pour $t = 0$, on obtient $\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$.

Pour $t = \pi$, on obtient $\pi\,\mathrm{cotg}(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2}$.

II.2.3. D'après II.1.4. $\beta(a,1-a) = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} = I_{a,1-a}$.

II.3.1. $\Psi(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$. On pose $k_n(a) = \mathrm{Log}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$.

k_n est C^1 sur $]0,1[$ et $k_n'(a) = \frac{2a}{a^2-n^2}$.

$|k_n'(a)| \le \frac{2}{n^2-1}$ terme général d'une série convergente donc $\sum k_n'$

converge normalement sur $]0,1[$, d'où Ψ est de classe C^1 sur $]0,1[$

et $\Psi'(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2} = \pi\,\mathrm{cotg}(\pi a) - \frac{1}{a}$.

II.3.2. $\Psi(a) = -\mathrm{Log}\left(\frac{a}{\sin(\pi a)}\right) + c$. Quand a tend vers 0, on trouve $c = -\mathrm{Log}(\pi)$.

$\Psi(a) = -\mathrm{Log}\left(a\, I_{a,1-a}\right)$.

Partie III

III.1.1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ qui est alors stable par φ.

III.1.2. La matrice de φ_n dans la base $(1, X, \dots X^n)$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2\alpha & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & k(k+1) & -n(n-1) \\ & & & \ddots & -2\alpha \\ 0 & & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $Sp\{\varphi_n\} = \{k(k+1)\ ,\ k = 0, 1, \dots n\}$.

III.1.3. φ_n est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Les sous espaces propres sont alors des droites vectorielles, ce qui assure l'existence et l'unicité de la base de vecteurs propres $(P_1, P_2, \dots P_n)$ telle que $P_1, P_2, \dots P_n$ soient de coefficient dominant 1.

Pour $k = 1, 2, \dots n$, on note r_k le degré de P_k.

Le coefficient de X^k dans $\varphi(P_k) = k(k+1)\ P_k$ est $r_k(r_k - 1) + 2r_k = k(k+1)$ ce qui montre que $r_k^2 - r_k = k^2 - k$ et par suite $r_k = k$.

III.1.4. $P_0 = 1$ et $P_1 = X - \alpha$.

III.1.5. Le coefficient de X^{k-1} dans $\varphi(P_k) = k(k+1)\ P_k$ est
$(k-1)(k-2)a_k + 2[(k-1)a_k - \alpha k] = k(k+1)a_k$ et donc $a_k = -\alpha$.

III.2.1. $$\frac{d^k}{dx^k}\left[(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}\right] = \sum_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} v_k (1+x)^{n+\alpha-r}(1-x)^{n-\alpha-k+r},$$

où, $v_k = (n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(n+\alpha-r+1)(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(n-\alpha-k+r+1)$.

Mais, $n+\alpha-r \geq \alpha+1 > 0$ et $n-\alpha-k+r \geq 1-\alpha > 0$, d'où le résultat.

III.2.2.

$$(P_n/Q) = \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}\right]Q^{(k-1)}(x)\right]_{-1}^{1} + (-1)^n\int_{-1}^{1}(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}Q^{(n)}(x)dx\right\}$$

$$= \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}Q^{(n)}(x)dx$$

III.2.3. Soit k et m deux entiers naturels distincts. On suppose par exemple que $k > m$.
D'après la question précédente, $\left(P_k / P_m\right) = \frac{k!}{(2k)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{k+\alpha}(1-x)^{k-\alpha}P_m^{(k)}(x)\,dx = 0$

car P_m est de degré $m < k$.
Ainsi, la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

III.2.4. $$\|P_n\|^2 = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}P_n^{(n)}(x)dx$$
$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,I_{n+\alpha+1,n-\alpha+1}$$
car P_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

III.3.1. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
$\left(P_{n+2} - XP_{n+1} / Q\right) = \left(P_{n+2} / Q\right) - \left(P_{n+1} / XQ\right) = 0$.

III.3.2. On a $\deg(P_{n+2} - XP_{n+1}) \leq n+2$, coefficient de X^{n+2} est nul et coefficient de X^{n+1} est $a_{n+2} - a_{n+1} = 0$, alors $\deg(P_{n+2} - XP_{n+1}) \leq n$. Comme $(P_0, P_1, \dots P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, alors il existe un réel γ_{n+1} et un polynôme Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $P_{n+2} - XP_{n+1} = -\gamma_{n+1}P_n + Q$.
Q étant orthogonal à P_n et à $P_{n+2} - XP_{n+1}$, il est orthogonal à lui-même et est donc nul.
Ainsi $P_{n+2} = XP_{n+1} - \gamma_{n+1}P_n$.

III.3.3. $\left(P_{n+2} / P_n\right) = \left(P_{n+1} / XP_n\right) - \gamma_{n+1}\|P_n\|^2$.

Or, $XP_n = P_{n+1} + Q$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où $\left(P_{n+1} / XP_n\right) = \|P_{n+1}\|^2$,

et par suite $\gamma_{n+1} = \dfrac{\|P_{n+1}\|^2}{\|P_n\|^2}$.

III.3.4. En utilisant les questions III.2.4. et III.3.3., on obtient $\gamma_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)}\dfrac{I_{n+\alpha+2,n-\alpha+2}}{I_{n+\alpha+1,n-\alpha+1}}$.

La question I.3.5. montre que $\dfrac{I_{n+\alpha+2,n-\alpha+2}}{I_{n+\alpha+1,n-\alpha+1}} = \dfrac{2(n+\alpha+1)(n-\alpha+1)}{(n+1)(2n+3)}$.

Ainsi, $\gamma_{n+1} = -\dfrac{(n+\alpha+1)(n-\alpha+1)}{(2n+1)(2n+3)}$.

III.4.1. Il est clair que $L_0 = 1$ et $L_1 = X$.

Pour $\alpha = 0$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} P_n$. D'où :

$$L_{n+2} = \frac{(2n+4)(2n+3)}{2(n+2)^2} L_{n+1} - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{4(n+2)^2(n+1)^2} L_n .$$

Ainsi, $L_{n+2} = \dfrac{(2n+3)}{(n+2)} L_{n+1} - \dfrac{(n+1)}{(n+2)} L_n$.

III.4.2. $\|L_n\|^2 = \left[\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\right]^2 \|P_n\|^2 = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} I_{n+1,n+1}$.

La question I.3.6. montre que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

PARTIE IV

IV.1. L'expression $\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\|^2$ est minimale, si et seulement si, $\sum_{k=0}^{n} c_k L_k$ est le projeté orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire $c_k = \dfrac{(f/L_k)}{\|L_k\|^2}, k = 1,2,\ldots n$,

$\left(\dfrac{L_0}{\|L_0\|}, \dfrac{L_1}{\|L_1\|}, \ldots \dfrac{L_n}{\|L_n\|}\right)$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV.2.1. Comme $f - \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$ est orthogonal à $\sum_{k=0}^{n} c_k L_k$, par le théorème de Pythagore

on obtient $\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\|^2$.

Or , $\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}$, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2} \le \|f\|^2$

et que la série de terme général $\dfrac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}$ est convergente.

IV.2.2. Comme la série de terme général $\dfrac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}$ est convergente alors $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{(f/L_k)}{\|L_k\|} = 0$.

Par ailleurs, et d'après III.4.2. $\|L_k\| = \sqrt{\dfrac{2}{2k+1}}$, on en déduit que $\lim_{k\to+\infty} \sqrt{k}(f/L_k) = 0$.

IV.3.1. L'égalité est vraie pour n=0.

Pour $n \geq 1$, en appliquant III.4.2. à l'entier $n-1$, on obtient le résultat.

IV.3.2. D'après la question précédente, on a

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)x L_k(x) = \frac{1}{2}\left((k+1)L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)\right) \quad (1)$$

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)y L_k(y) = \frac{1}{2}\left((k+1)L_{k+1}(y) + kL_{k-1}(y)\right) \quad (2).$$

$(1)\ L_k(y) - (2)\ L_k(x)$ donne

$$(x-y)\left(k+\frac{1}{2}\right)L_k(x)L_k(y) =$$

$$\frac{1}{2}\left((k+1)L_{k+1}(x)L_k(y) - kL_k(x)L_{k-1}(y)\right) - \frac{1}{2}\left((k+1)L_{k+1}(y)L_k(x) - kL_k(y)L_{k-1}(x)\right)$$

En passant à la somme, on obtient l'égalité.

IV.3.3. On a $H_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)L_k(x)L_k(y)$, ce qui prouve que H_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

IV.3.4. $$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)L_k(x)\int_{-1}^{1} f(t)L_k(t)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t)\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)L_k(t)L_k(x)dt = \int_{-1}^{1} f(t)H_n(x,t)dt$$

Lorsque f est constante égale à 1, l'égalité devient $\int_{-1}^{1} H_n(x,t)dt = 1$.

IV.4.1. $$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^{1}(f(t)-f(x))H_n(x,t)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} g(t)(t-x)H_n(x,t)\,dt$$

$$= \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\left[L_n(x)L_{n+1}(t) - L_{n+1}(x)L_n(t)\right]dt$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[(L_{n+1}/g)L_n(x) - (L_n/g)L_{n+1}(x)\right]$$

IV.4.2.

$$|S_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{n+1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi(1-x^2)}}\left[\frac{|(L_{n+1}/g)|}{\sqrt{n}} + \frac{|(L_n/g)|}{\sqrt{n+1}}\right]$$

$$\leq \sqrt{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\frac{1}{2\pi(1-x^2)}}\left[\sqrt{n+1}\,|(L_{n+1}/g)| + \sqrt{n}\,|(L_n/g)|\right]$$

La question IV.2.2. permet alors de conclure.