Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012
Concours Physique et Chimie, et Technologie
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

PARTIE I

1. • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $AP'' + BP'$ est un polynôme , donc $\mathscr{L}(P) \in \mathbb{R}[X]$.
   • Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
   $\mathscr{L}(\lambda P + Q) = A(\lambda P'' + Q'') + B(\lambda P' + Q') = \lambda(AP'' + BP') + (AQ'' + BQ')$.
   Donc $\mathscr{L}(\lambda P + Q) = \lambda\mathscr{L}(P) + \mathscr{L}(Q)$ et par suite $\mathscr{L}$ est linéaire .
   • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $p \leq n$.
   On a : P'' est nul ou de degré $(p-2)$ et P' est nul ou de degré $(p-1)$.
   Comme $A \in \mathbb{R}_2[X]$ et $B \in \mathbb{R}_1[X]$, alors $deg(AP'') \leq p$ et $deg(BP') \leq p$. Ainsi, $deg(\mathscr{L}(P)) \leq p \leq n$ et finalement $\mathscr{L}(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Ceci montre que $\mathscr{L}$est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Puisque : $\mathscr{L}(1) = 0$, $\mathscr{L}(X) = B = \beta_0 + \beta_1 X$ et $\mathscr{L}(X^2) = 2A + 2BX = 2\alpha_0 + 2(\alpha_1 + \beta_0)X + 2(\alpha_2 + \beta_1)X^2$, la matrice M de $\mathscr{L}$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc:
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2(\alpha_1 + \beta_0) \\ 0 & 0 & 2(\alpha_2 + \beta_1) \end{pmatrix}$$
   (b) M est triangulaire supérieure , ses valeurs propres sont donc les éléments de la diagonale. Ainsi, les valeurs propres de M sont : 0 , β_1 et $2(\alpha_2 + \beta_1)$. Or , par hypothèse , $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$ et $2\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$ ce qui donne $2(\alpha_2 + \beta_1) \neq \beta_1$. Les 3 valeurs propres de M sont donc 2 à 2 distinctes et comme $dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$,
   alors M est diagonalisable.

3. (a) Dans ce cas $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 2\beta_1 \end{pmatrix}$ et les hypothèses du 2) (b) sont vérifiées. La matrice M est donc diagonalisable .
   (b) M étant diagonalisable et admettant 3 valeurs propres distinctes , cherchons une base de $R_2[X]$ formée de vecteurs propres de M :
   • pour $\lambda = 0$, $\boxed{P_0 = 1}$ est un vecteur propre .
   • pour $\lambda = \beta_1$, on cherche $P \in ker(M - \beta_1 I)$. Comme $M - \beta_1 I = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & 0 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$, alors :
   $\boxed{P_1 = \beta_0 + \beta_1 X}$ est dans $ker(M - \beta_1 I)$.
   • pour $\lambda = 2\beta_1$, on va résoudre :
   $$(M - \beta_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta_1 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & -\beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Ce qui donne un vecteur propre $\boxed{P_2 = \alpha_0\beta_1 + \beta_0^2 + 2\beta_0\beta_1 X + \beta_1^2 X^2}$
   cl : (P_0, P_1, P_2) est une base de $R_2[X]$ qui diagonalise M.

4. Dans ce cas , $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & -2\alpha_2 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha_2 + \beta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$.
   M admet donc 2 valeurs propres : 0 et β_1 , qui sont distinctes avec β_1 de multiplicité 2.
   Alors M est diagonalisable si et seulement si $dim\,(ker(M - \beta_1 I)) = 2$, ce qui signifie que $(M - \beta_1 I)$ est de rang 1 .
   Or $M - \beta_1 I = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $M - \beta_1 I$ est de rang 1 si et seulement si $\beta_0 = 0$.

PARTIE II

1. (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ona $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ et $2xy \leq x^2+y^2$ (car $(x-y)^2 \geq 0$). Ainsi $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$.
   (b) • On a $\mathrm{H} \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $0 \in \mathrm{H}$.
   • Si $f, g \in \mathrm{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est continue sur I.
   • On a ωf^2 est intégrable sur I , donc $\omega\lambda^2 f^2$ l'est aussi .
   De plus , par 1) (a) , $(\lambda f+g)^2 \leq 2(\lambda^2 f^2 + g^2)$ donc
   $|\omega|(\lambda f+g)^2 = \omega(\lambda f+g)^2 \leq 2(\omega\lambda^2 f^2 + \omega g^2)$ qui est intégrable sur I , car
   $\omega\lambda^2 f^2$ et ωg^2 le sont . Ainsi $\omega(\lambda f+g)^2$ est intégrable sur I.
   cl : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathrm{H}$, $\lambda f + g \in \mathrm{H}$, H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

2. • On a $2|f|.|g| \leq (f^2+g^2)$ et $\omega > 0$, donc $\omega.|f.g| \leq \frac{1}{2}(\omega f^2 + \omega g^2)$. Comme $(\omega f^2 + \omega g^2)$ est intégrable sur I (car f , $g \in \mathrm{H}$) , alors $\omega.|f.g|$ est intégrable sur I et par suite $\omega.f.g$ est intégrable sur I .

3. • En utilisant 2), il est clair que $<.,.>$ est bien défini sur $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$.
   • Soit $f, g \in \mathrm{H}$. On a $<f,g>= \int_I \omega(t)f(t)g(t)\,dt = \int_I \omega(t)g(t)f(t)\,dt =<g,f>$.
   • Soit $f_1, f_2, g \in \mathrm{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$<\lambda f_1 + f_2, g>= \int_I (\lambda\omega(t)f_1(t)g(t) + \omega(t)f_2(t)g(t))\,dt = \lambda <f_1,g> + <f_2,g> .$$

   Donc $<.,.>$ est linéaire par rapport à la $1^{ère}$ variable , et par symétrie ,
   $<.,.>$ est bilinéaire .
   • $\forall f \in \mathrm{H}$, $<f,f>= \int_I \omega(t)(f(t))^2\,dt \geq 0$, car $\forall t \in I$, $\omega(t)(f(t))^2 \geq 0$.
   De plus , $<f,f>=0 \Longrightarrow \int_I \omega(t)(f(t))^2\,dt = 0$. Comme ωf^2 est **continue et positive** sur I, alors $\forall t \in I$, $\omega(t)(f(t))^2 = 0$ et par suite $\forall\, t \in I$, $f(t) = 0$. Ceci montre que $<.,.>$ est définie positive .

PARTIE III

1. $\forall x \in]-1,1[$, $(x^2-1)\omega'(x) = -(x^2-1)\dfrac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1-x}{1+x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \omega(x)$

2. (a) $\mathscr{L}(1) = 0$, $\mathscr{L}(X) = B = 1+2X$
   et pour $k \geq 2$, $\mathscr{L}(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$.
   (b) La matrice M de $\mathscr{L}$ dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & & n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

   (c) M est triangulaire supérieure , car $\forall\, k \in \{0, ..., n\}$, $deg(\mathscr{L}(X^k) \leq k$. Ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale , qui sont donc :
   $\lambda_k = k(k+1)$, $k \in \{0, ..., n\}$.
   (d) On a $dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et M admet $(n+1)$ valeurs propres distinctes
   ($k(k+1) = p(p+1) \Longrightarrow k = p$), donc M est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

(b) • Pour $n \geq 1$, $< H_n, H_0 >= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)H_n(t)H_0(t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(-1)^n e^{t^2}\omega^{(n)}(t)\, dt$$
$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t)\, dt$$
$$= (-1)^n \left[\omega^{(n-1)}(t)\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty}.$$

Or $\lim_{t\to-\infty} \omega^{(n-1)}(t) = \lim_{t\to+\infty} \omega^{(n-1)}(t) = 0$, d'après (a) , donc $< H_n, H_0 >= 0$, pour $n \geq 1$.

• pour $n = 0$, $< H_0, H_0 >=< 1, 1 >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$

(c) Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a
$< H_n, H_m >= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)H_n(t)H_m(t)\, dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t)H_m(t)\, dt(*)$.
Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. En faisant une intégration par parties , on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \omega^{(n)}(t)H_m(t)\, dt &= \left[\omega^{(n-1)}(t)H_m(t)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \omega^{(n-1)}(t)H_m'(t)\, dt \\ &= \left[\omega^{(n-1)}(t)H_m(t)\right]_\alpha^\beta - 2m\int_\alpha^\beta \omega^{(n-1)}(t)H_{m-1}(t)\, dt\end{aligned}$$

(car $H_m' = 2mH_{m-1}$). Or $H_m \in \mathbb{R}[X]$, alors d'après (a), on a $\lim_{t\to-\infty} \omega^{(n-1)}(t)H_m(t) = \lim_{t\to+\infty} \omega^{(n-1)}(t)H_m(t) = 0$. Ce qui donne lorsque $\alpha \to -\infty$ et $\beta \to +\infty$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t)H_m(t)\, dt = -2m\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n-1)}(t)H_{m-1}(t)\, dt$. Par suite , $< H_n, H_m >= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n)}(t)H_m(t)\, dt$

$$= 2m(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{(n-1)}(t)H_{m-1}(t)\, dt$$
$$= 2m < H_{n-1}, H_{m-1} > \text{, par } (*).$$

(d) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > m$ .D'après (b) et (c) , on a $< H_n, H_m >= 2m < H_{n-1}, H_{m-1} >= ... = 2^m m! < H_{n-m}, H_0 >= 0$, car $n - m \neq 0$. Ainsi , par symétrie , $< H_n, H_m >= 0$, si $n \neq m$. Donc la famille $(H_n)_{n\geq0}$ est orthogonale . D'autre part , $(H_k)_{0\leq k\leq n}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc libre et de cardinal $n+1 = dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) D'après (d) et (b), on a $< H_n, H_n >= 2^n n! < H_0, H_0 >= 2^n n!\sqrt{\pi}$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(H_0, ..., H_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. Comme $(H_0, ..., H_n)$ est orthogonale $< P, H_p >= a_p < H_p, H_p >= a_p 2^p p!\sqrt{\pi}$. Ainsi $a_p = \dfrac{< P, H_p >}{2^p p!\sqrt{\pi}}$, d'où le résultat.

8. (a) Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
• Pour $n = 1$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-(x-t)^2}\right) = 2(x-t)e^{-(x-t)^2} = H_1(x-t)e^{-(x-t)^2}$
• Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\left(e^{-(x-t)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(e^{-(x-t)^2}\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(H_n(x-t)e^{-(x-t)^2}\right) \\ &= 2(x-t)H_n(x-t)e^{-(x-t)^2} - H_n'(x-t)e^{-(x-t)^2} \\ &= e^{-(x-t)^2}\left[2(x-t)H_n(x-t) - H_n'(x-t)\right] \\ &= e^{-(x-t)^2}H_{n+1}(x-t)\text{ , d'après 3) .}\end{aligned}$$

(b) i. On a $t \mapsto e^{2xt}$ est développable en série entière en 0 , de rayon infini et $t \mapsto e^{-t^2}$ est développable en série entière en 0 , de rayon infini , leur produit g_x est alors développable en série entière en 0 , de rayon infini .

ii. g_x étant développable en série entière en 0 , de rayon infini , elle est alors la somme de sa série de Taylor en 0. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_x^{(n)}(0)}{n!} t^n$.

Or $g_x(t) = e^{x^2} e^{-(x-t)^2}$, ce qui donne $g_x^{(n)}(t) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(e^{-(x-t)^2} \right)$, donc d'après (a) , pour $t = 0$, $g_x^{(n)}(0) = e^{x^2} H_n(x) e^{-x^2} = H_n(x)$.

D'où, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$.

(c) i. φ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\omega(x)\varphi^2(x) = e^{-x^2} e^{2x} = e.e^{-(x-1)^2}$, alors $\omega(x)\varphi^2(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $\omega(x)\varphi^2(x) \underset{x \to -\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$. Ainsi, $\omega\varphi^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite $\varphi \in \mathbf{H}$.

ii. On a : $< \varphi, H_n >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^t H_n(t)\, dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^t \omega^{(n)}(t) e^{t^2}\, dt$

$= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^t \omega^{(n)}(t)\, dt (**)$

Une intégration par parties donne alors :

$< \varphi, H_n >= \lim_{\alpha \to +\infty} \left((-1)^n \left[e^t \omega^{(n-1)}(t) \right]_{-\alpha}^{\alpha} - (-1)^n \int_{-\alpha}^{\alpha} e^t \omega^{(n-1)}(t)\, dt \right)$.

Comme $\omega^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} H_{n-1}(t) e^{-t^2}$ et H_{n-1} est un polynôme, alors $\lim_{t \to +\infty} e^t \omega^{(n-1)}(t) = \lim_{t \to -\infty} e^t \omega^{(n-1)}(t) = 0$.

D'où, $< \varphi, H_n >= -(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^t \omega^{(n-1)}(t)\, dt =< \varphi, H_{n-1} >$, par $(**)$.

iii. D'après ce qui précède , $< \varphi, H_n >=< \varphi, H_0 >$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Or $< \varphi, H_0 >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^t e^{-t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}} e^{-(t-\frac{1}{2})^2}\, dt = e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.e^{\frac{1}{4}}$ par le changement de variable $u = t - \frac{1}{2}$ .Donc $< \varphi, H_n >= \sqrt{\pi}.e^{\frac{1}{4}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d) En prenant $t = \frac{1}{2}$ dans 8) (b), on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (\frac{1}{2})^n \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{2^n.n!} e^{\frac{1}{4}}$.

D'où, d'après (c) iii), on obtient $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{< \varphi, H_n >}{2^n.n!\sqrt{\pi}} H_n(x)$.

PARTIE V

1. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|e^{itx} f(t)| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto e^{itx} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f, g \in L_c^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a
$(\widehat{\lambda f + g})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} (\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \widehat{f}(x) + \widehat{g}(x)$. Ainsi $(\widehat{\lambda f + g}) = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}$.

3. Soit $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ .L'application : $(x,t) \mapsto e^{itx} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse de domination , car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ $|e^{itx} f(t)| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus , $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$,
donc $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Soit $\psi : (x,t) \mapsto e^{itx} f(t)$ .On a:
   - ψ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et vérifie l'hypothèse de domination .
   - $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = ite^{itx} f(t) = ie^{itx} h(t)$, donc $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   De plus , $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)| = |h(t)|$ et $|h|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$\frac{\partial \psi}{\partial x}$ vérifie donc l'hypothèse de domination .

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale , $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale , on a :
$\left(\widehat{f}\right)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\, dt = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} h(t)\, dt = i.\widehat{h}(x).$

5. (a) f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt + f(0)$ et comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, f admet une limite finie l en $+\infty$ et une limite finie l' en $-\infty$.
Si $l \neq 0$, alors $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{\sim} |l|$ et par suite ceci contredit le fait que $f \in L_c^1(\mathbb{R})$. Ainsi , $l = 0$.
De même , si $l' \neq 0$, $|f(x)| \underset{x \to -\infty}{\sim} |l'|$ et comme $x \mapsto |l'|$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, 0]$, on a nécessairement $l' = 0$. Finalement : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\widehat{(f')}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f'(t)\, dt$. On effectue une intégration par parties :
$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{itx} f'(t)\, dt = \left[e^{itx} f(t)\right]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} ixe^{itx} f(t)\, dt$.
Or , d'après (a) , $\lim_{x \to +\infty} e^{itx} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{itx} f(x) = 0$, car $|e^{itx} f(t)| = |f(t)|$, donc lorsque α tend vers $+\infty$, on obtient : $\widehat{(f')}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx} f(t)\, dt = -ix\widehat{f}(x)$.

6. (a) • $\varphi_0 \in L_c^1(\mathbb{R})$, car φ_0 est continue sur $\mathbb{R}$, et $\varphi_0(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$,
$\varphi_0(x) \underset{x \to -\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$.
• $x \mapsto x\varphi_0(x)$ est de même intégrable sur $\mathbb{R}$, car $x\varphi_0(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
• φ_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_0'(x) = -x\varphi_0(x)$, alors φ_0' est intégrable sur $\mathbb{R}$.
φ_0 vérifie ainsi les hypothèses de 4) et 5) .

(b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_0'(x) = -x\varphi_0(x)$.

(c) D'après (b) , $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{(\varphi_0')}(x) = -\widehat{h}(x)$, où
$h(x) = x\varphi_0(x)$.
D'après 4) , $\widehat{h}(x) = -i\widehat{\varphi_0}'(x)$ et d'après 5) , $\widehat{(\varphi_0')}(x) = -ix\widehat{\varphi_0}(x)$, donc :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-ix\widehat{\varphi_0}(x) = i\widehat{\varphi_0}'(x)$, ainsi $\widehat{\varphi_0}$ vérifie l'équation différentielle
$\boxed{y' + xy = 0}$.

(d) $y' + xy = 0$ est une équation différentielle linéaire du 1er ordre , dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont : $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, tel que
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi_0}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$. Or $\widehat{\varphi_0}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$ (par le changement de variable C^1-difféomorphisme $t \mapsto \sqrt{2}t$). D'où $\widehat{\varphi_0}(0) = \sqrt{2\pi}$ et par suite $\widehat{\varphi_0}(x) = \sqrt{2\pi}.e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. (a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{n+1}(x) = H_{n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = [2xH_n(x) - H_n'(x)]\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
$= 2x\varphi_n(x) - H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Or , $\varphi_n'(x) = H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, ce qui donne :
$\varphi_{n+1}(x) = 2x\varphi_n(x) - (\varphi_n'(x) + x\varphi_n(x)) = x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x)$. Ainsi ,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x) = h_n(x) - \varphi_n'(x)$.

(b) • On a φ_n est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme H_n est polynômiale , alors $\varphi_n(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ et par suite $\varphi_n \in L_c^1(\mathbb{R})$.
• $\varphi_n'(x) = x\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, donc $\varphi_n' \in L_c^1(\mathbb{R})$.
• $h_n(x) = x\varphi_n(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, donc $h_n \in L_c^1(\mathbb{R})$.

(c) D'après (b) , les hypothèses de 4) et de 5) sont vérifiées par φ_n , donc :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x) = -i(\widehat{\varphi_n})'(x)$ et $\widehat{\varphi_n'}(x) = ix\widehat{\varphi_n}(x)$.
Ainsi , $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi_{n+1}}(x) = \widehat{h_n}(x) - \widehat{\varphi_n'}(x) = -i(\widehat{\varphi_n})'(x) - ix\widehat{\varphi_n}(x)$ $(***)$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $\widehat{\varphi_n} = \lambda_n \varphi_n$.

- Pour $n = 0$, on a montré que $\widehat{\varphi_0} = \sqrt{2\pi}.\varphi_0$, le résultat est donc vrai , avec $\boxed{\lambda_0 = \sqrt{2\pi}}$.
- Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\varphi_n} = \lambda_n \varphi_n$, et montrons le résultat pour $n+1$.

$\widehat{\varphi_n} = \lambda_n \varphi_n \implies (\widehat{\varphi_n})' = \lambda_n \varphi_n'$.

En utilisant $(***)$ et (a), on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi_{n+1}}(x) = -i\lambda_n \varphi_n'(x) - ix\lambda_n \varphi_n(x) = i\lambda_n\left(-\varphi_n'(x) + x\varphi_n(x)\right) = i\lambda_n \varphi_{n+1}(x)$. Ainsi , $\widehat{\varphi_{n+1}} = \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}$, avec $\lambda_{n+1} = i\lambda_n$, ce qui donne : $\lambda_n = i^n \lambda_0 = i^n\sqrt{2\pi}$.

Finalement , on vient de prouver que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ , } \widehat{\varphi_n} = i^n\sqrt{2\pi}\, \varphi_n}$.

3. (a) Il existe une base de $\mathbb{R}_n[X]$ qui diagonalise M, formée de vecteurs propres de M, donc de $\mathscr{L}$. Comme les sous-espaces propres $ker(\mathscr{L}-\lambda_k id)$; $k\in\{0,...,n\}$ sont de dimension 1 , alors dans chacun d'eux ,il existe un seul polynôme unitaire . Il existe donc une unique base $(P_0,P_1,...,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $P_k\in ker(\mathscr{L}-\lambda_k id)$ et P_k soit unitaire pour tout $k\in\{0,...,n\}$.

(b) On a pour tout $k\in\{0,...,n\}$, $\mathscr{L}(P_k)=\lambda_k.P_k$. Soit $p=deg(P_k)$, on a :
$$\mathscr{L}(P_k)=\begin{cases}0, & \text{si } p=0,\\ 2X+1, & \text{si } p=1,\\ p(p+1)X^p+..., & \text{si } p\geq 2.\end{cases}$$
En comparant les coefficients dominants de $\mathscr{L}(P_k)$ et de $\lambda_k.P_k$, on a :
$\lambda_k=k(k+1)=p(p+1)$, d'où $p=k$. Ainsi, $deg(P_k)=k$, $\forall\, k\in\{0,...,n\}$.

(c) • $P_0\ \in ker(\mathscr{L})$ et P_0 est unitaire $\Longrightarrow \boxed{P_0=1}$.

• $P_1=X+\alpha$ et $\mathscr{L}(P_1)=2P_1 \Longrightarrow \boxed{P_1=X+\frac{1}{2}}$

• $P_2=X^2+\alpha X+\beta$ et $\mathscr{L}(P_2)=6P_2 \Longrightarrow \boxed{P_2=X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}}$.

4. (a) Soit $k\in\mathbb{N}$. $x\mapsto x^k\omega(x)$ est continue sur $]-1,1[$.
Au voisinage de 1 , $\lim\limits_{x\to1}x^k\omega(x)=0$, donc $x\mapsto x^k\omega(x)$ est intégrable sur $[0,1[$.
Au voisinage de (-1) ,on a : $|x^k|\omega(x)\underset{x\to-1}{\sim}\dfrac{\sqrt{2}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$: intégrable sur $]-1,0]$ car $\frac{1}{2}<1$ .D'où $x\mapsto x^k\omega(x)$ est intégrable sur $]-1,0]$.

(b) Soit $f\in\mathbb{R}[X]$. On pose $f^2(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$. Comme, $\forall\, k\in\{0,...,m\}$, $x\mapsto x^k\omega(x)$ est intégrable sur $]-1,1[$, alors ωf^2 est intégrable sur $]-1,1[$. f étant continue sur $]-1,1[$, alors $f\in$ **H** et par suite $\mathbb{R}[X]\subset$ **H**.

5. (a) Soit $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. On a $\mathscr{L}(P)-P'=(X^2-1)P''+2XP'=\left((X^2-1)P'\right)'$. Ainsi, à l'aide d'une intégration par parties sur $[\alpha,\beta]$, on a :
$$\int_\alpha^\beta\mathscr{L}(P)(t)Q(t)\omega(t)dt=\int_\alpha^\beta(\mathscr{L}(P)(t)-P'(t))Q(t)\omega(t)dt+\int_\alpha^\beta P'(t)Q(t)\omega(t)dt=\Big[(t^2-1)P'(t).Q(t)\omega(t)\Big]_\alpha^\beta$$
$$\int_\alpha^\beta(t^2-1)P'(t)(Q\omega)'(t)dt+\int_\alpha^\beta P'(t)Q(t)\omega(t)dt=$$
$$\Big[(t^2-1)P'(t).Q(t)\omega(t)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta(t^2-1)P'(t)Q'(t)\omega(t)dt-\int_\alpha^\beta(t^2-1)P'(t)Q(t)\omega'(t)dt$$
$$+\int_\alpha^\beta P'(t)Q(t)\omega(t)dt.$$
Or, d'aprés III) 1), On a $(t^2-1)\omega'(t)=\omega(t)$, $\forall t\in[\alpha,\beta]$. Donc :
$$\int_\alpha^\beta(t^2-1)P'(t)Q(t)\omega'(t)dt=\int_\alpha^\beta P'(t)Q(t)\omega(t)dt.\text{ D'où}$$
$$\int_\alpha^\beta\mathscr{L}(P)(t)Q(t)\omega(t)dt=\Big[(t^2-1)P'(t).Q(t)\omega(t)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta(t^2-1)P'(t)Q'(t)\omega(t)dt.$$

(b) $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $(t^2-1)\omega(t)=-(1-t)(1+t)(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}}=-(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}$.
D'autre part , $\lim\limits_{t\to1}(t^2-1)P'(t)Q(t)\omega(t)=\lim\limits_{t\to-1}(t^2-1)P'(t)Q(t)\omega(t)=0$,
et $t\mapsto(t^2-1)P'(t)Q'(t)\omega(t)$ est intégrable sur $]-1,1[$ .Donc , en faisant tendre α vers -1 et β vers 1 , on obtient d'après l'égalité du 5) (a) :
$$\begin{aligned}<\mathscr{L}(P),Q>&=\int_{-1}^1(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}P'(t)Q'(t)dt\\ &=\int_{-1}^1(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}Q'(t)P'(t)dt\\ &=<\mathscr{L}(Q),P>=<P,\mathscr{L}(Q)>.\end{aligned}$$

6. Soit $k,l\in\{0,...,n\}$. D'aprés 5), on a $<\mathscr{L}(P_k),P_l>=<P_k,\mathscr{L}(P_l)>$. Ce qui donne $<\lambda_kP_k,P_l>=<P_k,\lambda_lP_l>\Longrightarrow(\lambda_k-\lambda_l)<P_k,P_l>=0$. Donc si $k\neq l$, on a $\lambda_k\neq\lambda_l$ et par suite $<P_k,P_l>=0$. Ainsi, $(P_0,P_1,...,P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE IV

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_0(x) = e^{x^2}\omega^{(0)}(x) = 1$, $H_1(x) = -e^{x^2}\omega'(x) = 2x$ et
   $H_2(x) = e^{x^2}\omega''(x) = 4x^2 - 2$.
   D'où :$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\boxed{H_0(x) = 1}$, $\boxed{H_1(x) = 2x}$, $\boxed{H_2(x) = 4x^2 - 2}$

2. • Toute fonction polynôme f est continue sur $\mathbb{R}$.
   • $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $|x^k|\omega(x) = |x^k|e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc $x \mapsto x^k\omega(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et comme elle est continue sur $[0,1]$, alors elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par parité , elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par combinaison linéaire , on a alors : $\forall f \in \mathbb{R}[X]$, $f\omega$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $f^2\omega$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $f^2 \in \mathbb{R}[X]$). D'où $\mathbb{R}[X] \subset \mathbf{H}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a:
   $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\omega^{(n)}(x)$. En dérivant , on obtient :
   $$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-1)^n\left[2xe^{x^2}\omega^{(n)}(x) + e^{x^2}\omega^{(n+1)}(x)\right] \\ &= 2xH_n(x) - (-1)^{n+1}e^{x^2}\omega^{(n+1)}(x) \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$
   D'où, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.

4. (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\omega^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}(\omega')^{(n)}(x)$.
   Or, $\omega'(x) = -2xe^{-x^2}$, en posant $f(x) = -2x$, on a $\omega' = f.\omega$. Utilisons la formule de Leibniz , on aura $(\omega')^{(n)} = (f.\omega)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)}.\omega^{(n-k)}$.
   Or $f^{(k)} = 0$, $\forall\, k \geq 2$, donc $(\omega')^{(n)}(x) = C_n^0\, f(x)\omega^{(n)}(x) + C_n^1\, f'(x)\omega^{(n-1)}(x)$. D'où, $\omega^{(n+1)}(x) = -2x\omega^{(n)}(x) - 2n\omega^{(n-1)}(x)$. Ce qui donne
   $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\left(-2x\omega^{(n)}(x) - 2n\omega^{(n-1)}(x)\right) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$, par 3)
   $= 2nH_{n-1}(x)$, par 4)(a).

5. (a) Montrons par récurrence que H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n = 2^n$.
   • Pour $n = 0$, $H_0 = 1$, le résultat est vrai .
   • Pour $n = 1$, $H_1 = 2X$, le résultat est vrai .
   • Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai pour tout $k \leq n$ et montrons le pour $n + 1$.
   Par 4) : $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, H_n et H_{n-1} sont des polynômes , donc H_{n+1} est un polynôme . D'autre part ,
   $deg(H_n) = n \Rightarrow deg(XH_n) = n + 1$ et $deg(H_{n-1}) = n - 1 < n + 1$, donc $deg(2XH_n - 2nH_{n-1}) = n + 1$ çàd $deg(H_{n+1}) = n + 1$. De plus , le coefficient dominant de H_{n+1} est $a_{n+1} = 2a_n = 2^{n+1}$.

   (b) Par récurrence sur n . Pour $n = 0$ et $n = 1$, le résultat est vrai .
   Pour $n \geq 1$, on suppose que $H_k(-x) = (-1)^k H_k(x)$, pour tout $k \leq n$.
   On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} H_{n+1}(-x) &= -2xH_n(-x) - 2nH_{n-1}(-x) \\ &= 2(-1)^{n+1}xH_n(x) - 2(-1)^{n-1}nH_{n-1}(x) \\ &= (-1)^{n+1}\left[2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\right] \\ &= (-1)^{n+1}H_{n+1}(x). \end{aligned}$$
   D'où le résultat pour $n + 1$.

6. On a : $\mathscr{L}(H_n) = AH_n'' + BH_n' = H_n'' - 2XH_n'$. Donc $\mathscr{L}(H_0) = 0$ et d'après 4)(b), on a pour $n \geq 1$, $H_n' = 2nH_{n-1}$.
   Ainsi , $\mathscr{L}(H_n) = 2nH_{n-1}' - 4nXH_{n-1} = -2n(2XH_{n-1} - H_{n-1}') = -2nH_n$, d'après 3). Finalement , $\mathscr{L}(H_n) = -2nH_n$, ce qui implique que H_n est un vecteur propre de $\mathscr{L}$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\omega^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}H_{n-1}(x)e^{-x^2}$.
   Alors, $P(x)\omega^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (resp. $\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$) , car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^k e^{-x^2} = 0$, et PH_{n-1} est un polynôme. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)\omega^{(n-1)}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(x)\omega^{(n-1)}(x) = 0$