Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 04 Juin 2009	**Heure : 8 H 00**	**Durée : 4 H**	**Nbre pages : 07**
Barème : Problème I : 8 pts ; Problème II : 12 pts			

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants. Dans chaque problème, certaines parties et de nombreuses questions sont indépendantes. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.
On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions.

Problème I
MESURE DE DEBIT DANS UNE CANALISATION

On se propose d'étudier deux types de débitmètres qui permettent la mesure du débit volumique Q_V d'un fluide s'écoulant dans une canalisation.
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Formulaire :

En coordonnées cylindriques (r,θ,z), associées au trièdre local $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, on définit pour un champ scalaire $U(r,\theta,z)$ et pour un champ vectoriel $\overrightarrow{G} = G_r\,\vec{u}_r + G_\theta\,\vec{u}_\theta + G_z\,\vec{u}_z$, les opérateurs suivants :

$$\overrightarrow{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$div\overrightarrow{G} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,G_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\Delta U = div\,\overrightarrow{grad}\,U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Pour $\overrightarrow{G} = G(r)\vec{u}_z$ on a $\Delta\overrightarrow{G} = \left(\Delta G(r)\right)\vec{u}_z$

1ère Partie : Débitmètre de Venturi

Le débitmètre de Venturi illustré sur la *figure 1*, comporte :

- un tube de Venturi composé d'un cylindre d'entrée de diamètre D, égal à celui de la canalisation, d'un convergent, d'un cylindre de diamètre $d < D$ appelé « col du Venturi » et d'un divergent dont l'extrémité finale possède le même diamètre que la canalisation
- un manomètre différentiel à tube en U de faible section, rempli de mercure de masse volumique constante ρ_m, est raccordé à l'entrée et au col du Venturi, il indique une dénivellation h.

L'écoulement du fluide, de masse volumique constante ρ_f, dans la canalisation et donc dans le tube de Venturi est considéré stationnaire, parfait et incompressible.

Les champs de vitesse et de pression $(\vec{v}_1, p_1)$ et $(\vec{v}_2, p_2)$ sont respectivement uniformes sur les sections droites 1 et 2 du tube de Venturi.

L'intensité g du champ de pesanteur est supposé uniforme. L'axe Oz représente la verticale ascendante du lieu.

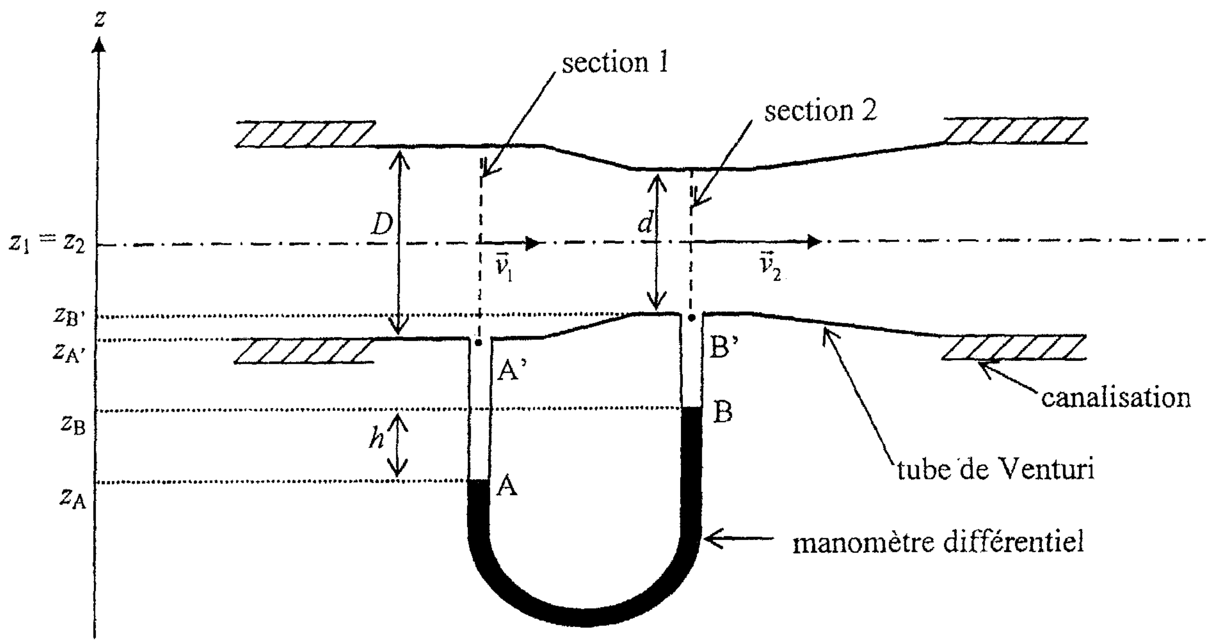

figure 1

1-a) Le mercure étant au repos dans le tube en U, déterminer la différence de pression $p_A - p_B$ en fonction de ρ_m, g et h.

1-b) Le fluide étant au repos dans le tube en U, déterminer la différence de pression $p_A - p_B$ en fonction de ρ_f, g, h, d, D et de la différence de pression $p_1 - p_2$.

1-c) En déduire la différence de pression $p_1 - p_2$.

2- L'écoulement étant incompressible, déterminer la relation entre v_1, v_2, d et D.

3-a) Etablir la relation de Bernoulli pour le type d'écoulement décrit dans la canalisation.

On donne : $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$ et $dU(M) = \overrightarrow{grad}\,U \cdot \overrightarrow{dl}_M$ avec $U(M)$ une fonction scalaire.

3-b) En déduire la différence de pression $p_1 - p_2$ en fonction de ρ_f, d, D et v_1.

4- Exprimer le débit volumique Q_V dans la canalisation en fonction de ρ_f , ρ_m , g, h, d et D.

5- Pour remplir la soute (réservoir) à carburant d'un avion, le kérosène est pompé avec un débit mesuré à l'aide d'un débitmètre de Venturi. Calculer ce débit. On donne : ρ_m = 13,6 10^3 kg m^{-3} ; $\rho_{kérosene}$ = 820 kg m^{-3} ; d = 10 cm ; D = 20 cm ; h = 22 cm et g = 9,81 m s^{-2} .

6- Quel est l'effet de la variation de la section du tube de Venturi ? Expliquer.

2ème Partie : Débitmètre électromagnétique

1- Un fluide incompressible homogène de masse volumique ρ, de viscosité dynamique η et légèrement conducteur de conductivité électrique γ, est en écoulement stationnaire suivant $\vec{u}_z$ dans un tube cylindrique électriquement isolant de rayon a et d'axe Oz (voir *figure 2-a*).
On négligera l'effet de la pesanteur.

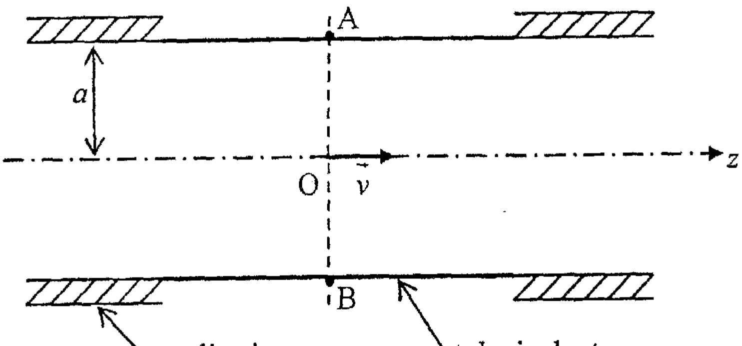

figure 2-a

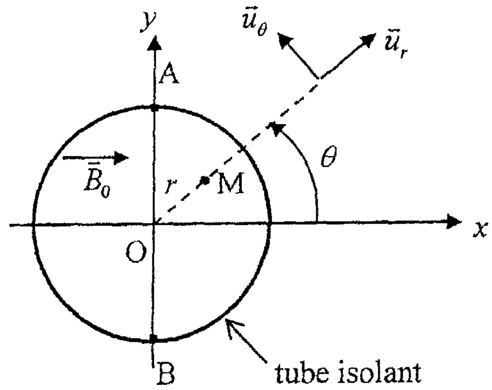

figure 2-b

1-a) Quelles hypothèses conduisent à chercher le champ de vitesse dans le tube sous la forme : $\vec{v} = v(r)\,\vec{u}_z$ et le champ de pression sous la forme $p(r,z)$?

1-b) L'équation de Navier Stockes, donnée ci-dessous, est une forme du théorème de la résultante dynamique, appliqué à une particule fluide : $\rho\left[\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right] = -\overrightarrow{grad}\,p + \eta\,\Delta\vec{v}$ où Δ désigne l'opérateur laplacien.

Que représente le terme $\eta\,\Delta\vec{v}$?

Que représente les termes $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$? Montrer qu'ils sont nuls.

1-c) Montrer que la pression ne dépend que de la variable z et que l'équation différentielle vérifiée par le champ de vitesse s'écrit : $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right) = \dfrac{K}{\eta}$, où K est une constante qu'on ne cherche pas à déterminer.

1-d) En déduire que le champ de vitesse s'écrit : $v = v_0\left(a^2 - r^2\right)$, avec v_0 une constante à déterminer.

1-e) Exprimer le débit volumique Q_V du fluide dans le tube en fonction de v_0 et a.

2- Le modèle du débitmètre électromagnétique, illustré sur la *figure 2*, comporte :

- un tube cylindrique électriquement isolant d'axe Oz, de même rayon a que la canalisation.
- un dispositif, non représenté sur la figure, crée un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{u}_x$, dans toute la région de l'écoulement dans le tube. La *figure 2-b* représente une coupe transversale de la conduite.

Dans le tube s'écoule le fluide, étudié dans la question 1, avec la vitesse $\vec{v} = v_0\left(a^2 - r^2\right)\vec{u}_z$.

2-a) On rappelle la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\left(-\overrightarrow{grad}\,V + \vec{v} \wedge \vec{B}_0\right)$ avec V le potentiel électrique et $\vec{j}$ le vecteur densité de courant. Quel phénomène physique décrit le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$?

2-b) Rappeler l'équation de conservation de la charge. En déduire l'équation vérifiée par le potentiel électrique $V(r,\theta)$.

2-c) On cherche une solution de la forme $V(r,\theta) = f(r)\sin\theta$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$ et la mettre sous la forme $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{df}{dr} + \dfrac{f}{r}\right) = -\,2\,v_0\,B_0\,r$.

2-d) En déduire que le potentiel électrique s'écrit : $V = \left(-\,v_0\,B_0\dfrac{r^3}{4} + C\,\dfrac{r}{2}\right)\sin\theta$ où C est une constante.

2-e) Quelle est la condition aux limites vérifiée par le vecteur densité de courant $\vec{j}$ à la surface du tube isolant ? En déduire la valeur de la constante C.

2-f) On place un voltmètre entre les points A et B (*figure 2-b*). Exprimer la différence de potentiel $V_A - V_B$ en fonction de Q_V, a et B_0.

2-g) Le débitmètre électromagnétique est utilisé dans l'industrie agroalimentaire pour mesurer le débit des liquides et des pates en écoulement dans une conduite. Calculer Q_V.

On donne : $B_0 = 10^{-3}$ T ; $a = 50$ cm et $V_A - V_B = 1$ mV.

Problème II
DIFFUSION RAYLEIGH ATMOSPHERIQUE

Sous l'action de la lumière provenant du soleil, les différentes molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles oscillants et réémettent une partie de la lumière solaire qu'elles ont absorbée. On propose dans ce problème une étude simplifiée de cette diffusion Rayleigh atmosphérique.

L'atmosphère est caractérisée par sa permittivité électrique ε_0 et sa perméabilité magnétique μ_0.

On notera c la célérité de la lumière dans le vide.

1ère Partie : Rayonnement émis par un dipôle

On considère un doublet constitué de deux charges ponctuelles : $(-q)$ est immobile au point O et $(+q)$ est mobile le long de l'axe Oz suivant la loi : $z(t) = a\cos(\omega t)$; a et ω représentent respectivement l'amplitude et la pulsation des oscillations. L'ensemble constitue un modèle du dipôle oscillant qui rayonne dans le vide une onde électromagnétique de pulsation ω en un point M repéré par les coordonnées sphériques (r,θ,φ) ; $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ étant la base sphérique (voir *figure 3*).

On se place dans les conditions $a \langle\langle \lambda \langle\langle r$; λ étant la longueur d'onde de l'onde électromagnétique émise.

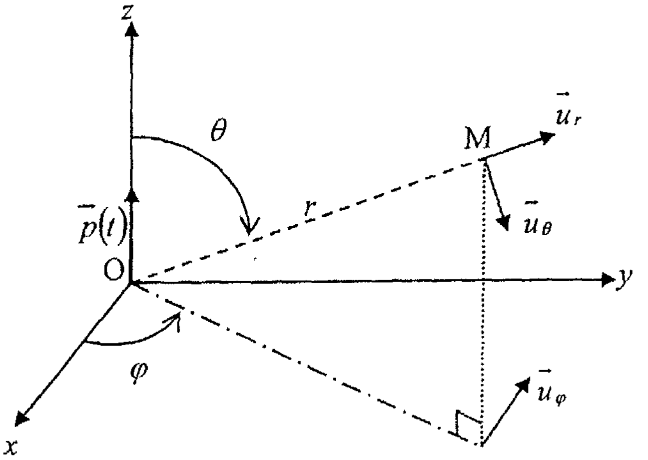

figure 3

1-a) Montrer que l'hypothèse $a \langle\langle \lambda$ impose une condition sur la vitesse de déplacement de la charge q.

1-b) Commenter les hypothèses $a \langle\langle r$ et $\lambda \langle\langle r$.

1-c) Déterminer le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ de ce dipôle oscillant. Quelle est la valeur p_0 de son amplitude ?

2- Le champ électromagnétique rayonné en M est tel que :

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{d^2 p(t - \frac{r}{c})}{dt^2} \frac{\sin\theta}{r} \text{ et } B_\varphi = \frac{E_\theta}{c}$$; les autres composantes sont négligeables.

2-a) Justifier, par des considérations de symétrie, la direction des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

2-b) Interpréter la présence du terme $t - \frac{r}{c}$.

2-c) Comparer la structure de cette onde à celle d'une onde plane. Justifier.

2-d) Déterminer le champ $\vec{E}(M,t)$ en un point appartenant à l'axe Oz et en un point appartenant au plan xOy. Commenter.

3-a) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ de cette onde et la norme de sa valeur moyenne temporelle $\left\|\langle\vec{\Pi}\rangle\right\|$ en fonction de p_0, ε_0, ω, c et les coordonnées du point M.

3-b) Montrer que la puissance électromagnétique moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est : $P_r = \frac{p_0^2\,\omega^4}{12\pi\,\varepsilon_0\,c^3}$.

On donne $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$.

2ème Partie : Polarisation par diffusion de la lumière solaire

1- Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement dans la direction Oz, se propage dans le sens des x croissants. Elle induit sur une molécule, située au point O, un dipôle oscillant $\vec{p}_z(t)$ qui rayonne à son tour (voir *figure 4*).

En utilisant les résultats de la question **2-d** de la première partie, préciser sur un schéma la direction du champ $\vec{E}_1$ rayonné par le dipôle $\vec{p}_z(t)$ aux points de coordonnées cartésiennes $(x, 0, 0)$; $(0, y, 0)$ et $(0, 0, z)$.

2- Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement dans la direction Oy, se propage dans le sens des x croissants. Elle induit sur une molécule, située au point O, un dipôle oscillant $\vec{p}_y(t)$ qui rayonne à son tour (voir *figure 4*). Préciser sur un schéma la direction du champ $\vec{E}_2$ rayonné par le dipôle $\vec{p}_y(t)$ aux points de coordonnées cartésiennes $(x, 0, 0)$; $(0, y, 0)$ et $(0, 0, z)$.

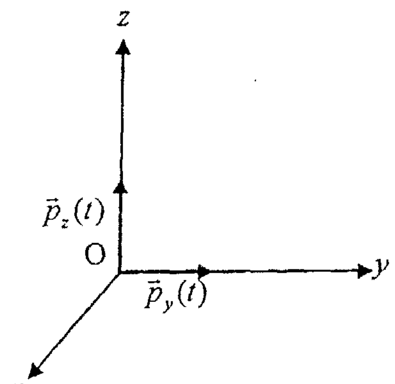

figure 4

3- On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω dans le visible provenant du soleil. Cette onde non polarisée se propage dans le sens des x croissants.
3-a) Montrer qu'on peut décrire cette onde comme la superposition de deux ondes sinusoïdales se propageant dans le sens des x croissants, polarisées rectilignement l'une selon Oy et l'autre selon Oz.
3-b) Cette onde induit sur une molécule, située au point O, un dipôle oscillant $\vec{p}(t)$ qui rayonne à son tour. Préciser sur un schéma la direction du champ $\vec{E}_R$ rayonné par le dipôle $\vec{p}(t)$ aux points de coordonnées cartésiennes $(x, 0, 0)$; $(0, y, 0)$ et $(0, 0, z)$. Conclure.
3-c) On observe le ciel dans une direction voisine de celle du soleil à travers un polariseur. Qu'observe-t-on quand on fait tourner l'axe du polariseur ?
3-d) On réalise la même expérience mais en observant le ciel dans une direction perpendiculaire à celle du soleil. Qu'observe-t-on à travers le polariseur ?

3ème Partie : Diffusion de la lumière solaire par les molécules de l'atmosphère

L'onde incidente émise du soleil, est caractérisée par son champ électrique qui s'écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - kx)}$ avec $E_0 = \|\vec{E}_0\|$ est une constante. Cette onde interagit avec l'électron d'une molécule de l'atmosphère placée en O, celui-ci effectue des petites oscillations à la pulsation ω. L'électron de masse m_e et de charge électrique $(-e)$ est repéré depuis O par le vecteur $\vec{r}_e$.
Le mouvement de l'électron est régi par l'équation différentielle suivante :

$$m_e \frac{d^2\vec{r}_e}{dt^2} = - m_e \omega_0^2\, \vec{r}_e - \frac{m_e}{\tau}\frac{d\vec{r}_e}{dt} - e\left(\vec{E} + \frac{d\vec{r}_e}{dt} \wedge \vec{B}\right)$$

; ω_0 et τ sont des constantes positives caractéristiques de la molécule considérée.

1-a) Quelle est la signification physique du terme $- m_e \omega_0^2\, \vec{r}_e$?

1-b) Expliquer la présence du terme $-\dfrac{m_e}{\tau}\dfrac{d\vec{r}_e}{dt}$.

2- On suppose que $\|\vec{r}_e\| \ll \lambda$ où λ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique incidente.

2-a) Pourquoi peut-on négliger l'action du champ magnétique sur l'électron devant celle du champ électrique?

2-b) Justifier qu'on peut, à l'échelle atomique, remplacer le champ $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - kx)}$, par le champ $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t)}$.

3-a) Pourquoi on a le droit de remplacer les grandeurs réelles dans l'équation différentielle par leurs grandeurs complexes associées. Etablir, en régime sinusoïdal forcée, l'expression de $\underline{\vec{r}}_e$.

3-b) On suppose que la molécule ne possède pas de moment dipolaire en l'absence de champ électrique extérieur et on admet que les N électrons de cette molécule ont le même déplacement, en déduire $\underline{\vec{p}}(t)$ le moment dipolaire de la molécule induit par l'onde électromagnétique, ainsi que son amplitude complexe $\underline{p}_0$.

4-a) En se référant à la question **3-b** de la première partie déterminer P_d la puissance moyenne diffusée par une molécule.

4-b) Exprimer $\left\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\right\|$ la norme de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde incidente en fonction de E_0, ε_0 et c. En déduire la relation entre P_d et $\left\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\right\|$.

5- Pour les molécules constituant l'atmosphère terrestre (diazote et dioxygène essentiellement) on a $\omega_0 = 1{,}25\ 10^{16}$ rad s^{-1} et $\tau = 10^{-9}$ s.

On donne la pulsation de la radiation rouge $\omega_R = 2{,}35\ 10^{15}$ rad s^{-1} et celle du bleu $\omega_B = 2\ \omega_R$

5-a) Sachant que dans ces conditions on a la diffusion Rayleigh. Justifier la relation suivante :

$$P_d = \frac{N^2 e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4 m_e^2}\left\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\right\|\frac{\omega^4}{\omega_0^4}.$$

5-b) En déduire une explication de la couleur bleue du ciel en plein jour par beau temps.

6- En réalité le rayonnement solaire perd de l'énergie en traversant l'atmosphère à cause de la diffusion. Pour cette raison on suppose que la puissance moyenne transportée par l'onde incidente, qui se propage dans le sens des x croissants, varie légèrement en fonction de x :

$\left\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\right\| = \Pi(x)$.

Soit un cylindre élémentaire d'axe Ox de surface de base S, compris entre les abscisses x et x + dx (voir *figure 5*).

On note P_i la puissance moyenne de l'onde incidente traversant sous incidence normale la surface d'aire S.

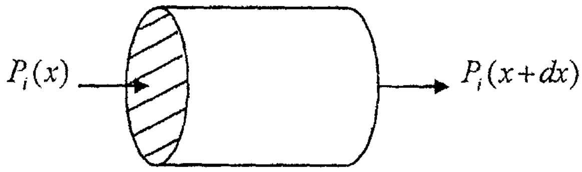

figure 5

6-a) On suppose que l'atmosphère terrestre est constituée de n molécules par unité de volume. déterminer $dP_d(x)$ la puissance diffusée par les molécules contenues dans le cylindre élémentaire.

6-b) En effectuant un bilan de puissance sur ce cylindre élémentaire, montrer que $\Pi(x) = \Pi(0)\,e^{-x/L}$ et exprimer L en fonction de ε_0, m_e, N, n, e, ω_0, ω et c.

6-c) Calculer les valeurs de L pour les ondes électromagnétiques correspondantes aux radiations rouge et bleue et commenter. On donne $N = 1$ électron par molécule ; $n = 10^{25}$ molécules par m^3 ; $c = 3\ 10^8$ m s^{-1} ; $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg et $\varepsilon_0 = 8{,}8\ 10^{-12}$ SI.

6-d) Pourquoi les couchers de soleil sont-ils rouges par beau temps ? Pourquoi cette couleur n'est pas la même en plein jour ?

Fin de l'épreuve