…blème 1 (34 points)

1°) Premier principe : système fermé, $\Delta(E_{c_{mac}} + E_{p_{mac}} + U) = \ldots$

2°) 1) Soit $M(t)$ la masse de (Σ) ; $dM = M(t+dt) - M(t) = \delta M^{ech} = \delta m_1 - \delta m_2$

$\Rightarrow M(t+dt) + \delta m_2 = M(t) + \delta m_1$: bilan de masse (1)

En régime stationnaire $M(t+dt) = M(t) \Rightarrow \delta m_1 = \delta m_2 \Rightarrow D_{m_1} = D_{m_2} = D_m$

2) système fermé : à t : $\{(\Sigma) + \delta m_1\}$ (1)

à $t+dt$: $\{(\Sigma) + \delta m_2\}$

1er principe : $dE_{c_{mac}} + \underbrace{dE_{p_{mac}}}_{=0} + dU = \delta W_u + \delta W_p + \delta Q$

$$dU = U(t+dt) - U(t) = \left[U_\Sigma(t+dt) + \delta m_2 u_2\right] - \left[U_\Sigma(t) + \delta m_1 u_1\right] = \delta m (u_2 - u_1)$$

$= D_m (u_2 - u_1)\, dt$

$$dE_{c_{mac}} = \delta m \left(\tfrac{1}{2} c_2^2 - \tfrac{1}{2} c_1^2\right) = D_m \left(\tfrac{1}{2} c_2^2 - \tfrac{1}{2} c_1^2\right) dt \,;$$

$$\delta W_p = \delta m (P_1 v_1 - P_2 v_2) = D_m (P_1 v_1 - P_2 v_2)\, dt \,;$$

$$\Rightarrow D_m \left[\left(u_2 + \tfrac{1}{2} c_2^2\right) - \left(u_1 + \tfrac{1}{2} c_1^2\right)\right] dt = D_m (P_1 v_1 - P_2 v_2)\, dt + \delta W_u + \delta Q$$

$$\Rightarrow D_m \left[\left(\underbrace{u_2 + P_2 v_2}_{h_2} + \tfrac{1}{2} c_2^2\right) - \left(\underbrace{u_1 + P_1 v_1}_{h_1} + \tfrac{1}{2} c_1^2\right)\right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

$$\Rightarrow D_m \left[\left(h_2 + \tfrac{1}{2} c_2^2\right) - \left(h_1 + \tfrac{1}{2} c_1^2\right)\right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

2-3°) Détente de Joule Thomson :

i) Régime stationnaire

ii) Conduite horizontale, rigide, adiabatique

iii) Ecoulement très lent.

i) $\Rightarrow$ on peut appliquer le résultat 2-2

ii) $\Rightarrow \mathcal{P}_u = 0$; $\mathcal{P}_{th} = 0$

iii) $\Rightarrow \Delta E_{c_{mac}} = 0$

$\Rightarrow D_m (h_2 - h_1) = 0$

$\Rightarrow h_2 = h_1$

Détente isenthalpique

3°) Second principe : système fermé : $\Delta S = S_{éch} + S_{cré} = \int \frac{\delta Q}{T_0} + S_{cré}$

$S_{cré} \geq 0$

4°) Bilan entropique : $dS = \frac{\delta Q}{T_0} + S_{cré}$, $S_{cré} \geq 0 \Rightarrow dS \geq \frac{\delta Q}{T_0}$

or $dS = S(t+dt) - S(t) = \delta m (s_2 - s_1)$ et $\delta Q = \delta m . q$

$\delta m (s_2 - s_1) \geqslant \frac{\delta m . q}{T_0} \Rightarrow s_2 - s_1 \geqslant \frac{q}{T_0}$ ------ (1)

II) 5-1°) $PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow Pv = rT$ ------ (0,5)

5-2°) $dh = c_p dT$; $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$; $c_p - c_v = r \Rightarrow dh = \frac{r\gamma}{\gamma - 1} dT$ ------ (0,5)

5-3°) Identité thermodynamique : $dh = T ds + v dP$ ------ (0,5)

$\Rightarrow ds = \frac{r\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - r \frac{dP}{P}$ ------ (0,5)

6-1°) $\Delta h = 0 \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow T_f = T_i$ $(T_2 = T_1)$ ------ (0,5)

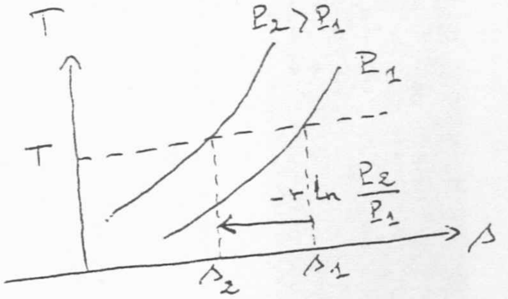
2^{e} loi de Joule : Gaz parfait : $H = H(T)$ ------ (0,5)

6-2°) $dT = 0 \Rightarrow ds = -r \frac{dP}{P} \Rightarrow \Delta s = -r \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) = -r \ln \frac{P_2}{P_1} = s_{cré}$ (0,5)

détente $\Rightarrow P_2 < P_1 \Rightarrow s_{cré} = -r \ln \frac{P_2}{P_1} > 0$: transformation irreversible ------ (0,5)

7-1°) $\frac{r\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = ds + r\frac{dP}{P} \Rightarrow s(T, P_1) - s(T_1, P_1) = \frac{r\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T}{T_1}$ (1)

$\Rightarrow T = T_1 \exp\left[\frac{\gamma-1}{r\gamma}(s - s_1)\right]$ + (0,5)



7-2°) $s(T, P_2) = s(T, P_1) - r\ln\frac{P_2}{P_1}$: translation par (1)

rapport à l'isobare P_2 de la quantité : $-r\ln\frac{P_2}{P_1} = -r\ln 3$ ------ + (0,5)

7-3°) isobare P_2 est obtenue à partir de l'isobare P_1 par une (1)

translation de $\left(-r\ln\frac{P_2}{P_1}\right)$.

III

8°) Gaz réel :

- particules non ponctuelles $\Rightarrow$ autres degrés de liberté que ceux de la translation
- Energie potentielle d'interaction non négligeable. (0,5)

9-1°) a) $-\frac{a}{V^2}$: Pression moléculaire : caractérise les interactions de VDW (0,5)

b) b : covolume : volume exclu dans le modèle des sphères dures.

9-2°) $\delta q = C_v dT + \ell dV \Rightarrow ds = C_v \frac{dT}{T} + \ell dV$

et $du = C_v dT + (\ell - P) dV$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_v}{T}\right)\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{l}{T}\right)\right]_v \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}(l-p)\right]_v$$

En combinant les deux équations $\Rightarrow l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ et $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$

9-3°) $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b}$; $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v = 0 \Rightarrow c_v$ est indépendant de v. ---------- 0

$$l = \frac{rT}{v-b} \Rightarrow du = c_v\,dT + \frac{a}{v^2}dv \Rightarrow \Delta u = c_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) \;\text{----}\; 1$$

$$ds = c_v\frac{dT}{T} + \frac{r\,dv}{v-b} \Rightarrow \Delta s = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} + r\ln\frac{(v_2-b)}{(v_1-b)} \;\text{---}\; 1$$

9-4°)

9-4-1) $\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = b - \frac{2a}{rT}$ ----------

$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T > 0 \Rightarrow T > \frac{2a}{br}$ ---------- 0,5

h est une fonction ↗ de P si $T > \frac{2a}{br}$

h " " ↘ de P si $T < \frac{2a}{br}$ ---------- 1

9-4-2) Détente de Joule Thomson : $dh = 0$; $dP < 0$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP = 0 \Rightarrow \underbrace{c_p}_{>0}\,dT = -\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \underbrace{dP}_{<0}$$

Pour avoir $dT < 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T < 0 \Rightarrow T < \frac{2a}{br} = T_i$ ----- 2

Pour N_2 : $T_{i_{N_2}} = 821\,K \Rightarrow T_{ambiante} < T_{i_{N_2}} \Rightarrow$ Possibilité de refroidissement 2

Pour H_2 : $T_{i_{H_2}} = 222{,}7\,K \Rightarrow T_{ambiante} > T_{i_{H_2}} \Rightarrow$ refroidissement impossible.

IV - 10) Le potentiel thermodynamique est une fonction permettant de déterminer l'évolution du système libéré de ses contraintes extérieures et vérifiant les propriétés suivantes : 0,5

- un potentiel thermodynamique décroît lors d'une évolution spontanée
- à l'équilibre thermodynamique, le potentiel thermodynamique est minimal

11-1) $S_{cré} = \Delta S - S_{éch} \geq 0 \Rightarrow \Delta S \geq 0 \Rightarrow \Delta(-S) \leq 0$

Potentiel thermodynamique : fonction néguentropie $(-S)$ 1

11-2)
$$\left.\begin{aligned} &\Delta S - \frac{Q}{T_0} \geq 0 \\ &\Delta U = W + Q = Q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta S - \frac{\Delta U}{T_0} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{T_0}\cdot\Delta(U - T_0 S) \leq 0$$

Potentiel thermodynamique : $F^* = U - T_0 S$ 1

11-3) $\Delta S - \frac{Q}{T_0} \geq 0$

$\left.\begin{array}{l}\Delta S - \frac{Q}{T_0} \geq 0 \\ \Delta U = W + Q = -P_0 \Delta V + Q\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta S - \frac{1}{T_0}\left(\Delta U + P_0 \Delta V\right) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{T_0} \Delta\left(U + P_0 V - T_0 S\right) \leq 0$

Potentiel thermodynamique : $G^* = U + P_0 V - T_0 S$.

12)

12-1) $\mathcal{P}_{max} = ?$

d'après 4°) : $D_m (s_2 - s_1) \geq \frac{\mathcal{P}_{th}}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left[D_m\left(\left\{h_2 + \frac{c_2^2}{2}\right\} - \left\{h_1 + \frac{c_1^2}{2}\right\}\right) - \mathcal{P}_u \right]$

$\Rightarrow D_m \left[\left(h_2 - T_0 s_2 + \frac{1}{2} c_2^2\right) - \left(h_1 - T_0 s_1 + \frac{1}{2} c_1^2\right) \right] \leq \mathcal{P}_u$

$-\mathcal{P}_{rec}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{rec_{max}} = -D_m \left[\left(h_2 - T_0 s_2 + \frac{1}{2} c_2^2\right) - \left(h_1 - T_0 s_1 + \frac{1}{2} c_1^2\right) \right]$

12-2) $\mathcal{P}_{rec_{max}} = D_m\, w_{rec_{max}}$

$\Rightarrow w_{rec_{max}} = \left(h_1 - T_0 s_1 + \frac{1}{2} c_1^2\right) - \left(h_2 - T_0 s_2 + \frac{1}{2} c_2^2\right)$

12-3) Potentiel thermodynamique : f^*

$w_{rec_{max}} = -\Delta f^* \Rightarrow f^* = h - T_0 s + \frac{1}{2} c^2$

Ba

PROBLEME n°02 (46 Points)

Questions préliminaires :

. Onde sonore émise par un haut parleur. On met en évidence le caractère progressif de l'onde à l'aide d'un microphone relié à un oscilloscope. (1)
On peut décrire la propagation de l'onde sonore par la surpression $p(M,t)$ ou le champ de vitesses relatif aux particules de fluide.
On peut prendre d'autres exemples tel que la corde vibrante

. Equation de propagation D'Alembert.
Sa solution générale est une superposition de deux ondes se propageant dans des sens opposés. (1)

$$\psi(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

. V est exprimée en $m\,s^{-1}$; Elle représente la célérité de propagation de la fonction d'onde relative au phénomène (1)

.1 • Ondes transversales : Les variations temporelle et spatiale se font perpendiculairement à la direction de propagation (0,75)
.2 Exemples : - Onde mécanique le long d'une corde : $y(x,t)$.
- Onde électromagnétique : $\vec{E}(M,t)$, $\vec{B}(M,t)$ - - - (+ 0,75)
• Ondes longitudinals : La fonction d'onde varie suivant la direction de propagation.
Exemples : - Onde sonore ou ultrasonore $p(x,t)$, $\vec{v}(x,t)$, - - -
- Onde mécanique le long d'un ressort

5. Ces fonctions d'ondes sont planes, progressives et harmoniques. Elles se propagent dans les sens opposés avec les célérités $+V$ pour $\psi_1(x,t)$ et $-V$ pour $\psi_2(x,t)$.

En notation complexe.

$$\underline{\psi}_1(x,t) = a_1 \exp j\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right) \text{ et } \underline{\psi}_2(x,t) = a \exp j\left(\omega\left(t + \frac{x}{V}\right)\right)$$ (1)

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}_1(x,t)}{\partial x^2} = -a\frac{\omega^2}{V^2}\underline{\psi}_1(x,t) \; ; \; \frac{\partial^2 \underline{\psi}_1(x,t)}{\partial t^2} = -a\omega^2 \underline{\psi}_1(x,t).$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \underline{\psi}_1(x,t)}{\partial t^2} = 0$$ de même pour $\underline{\psi}_2(x,t)$

6. $$\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_1(x,t) + \underline{\psi}_2(x,t) = a \exp j\omega t\left(\exp\left(-j\frac{\omega}{V}x\right) + \exp\left(j\frac{\omega}{V}x\right)\right)$$

$$= 2a \exp j\omega t \cdot \cos\left(\frac{\omega}{V}x\right)$$

En notation réelle ;

$$\psi(x,t) = 2a \cos\left(\frac{\omega}{V}x\right) \cdot \cos\omega t$$ (1)

Les variables x et t sont indépendants. La variable x intervient au niveau de l'amplitude des vibrations temporelle $\Rightarrow$ il n'y a plus propagation :

il s'agit d'une onde stationnaire.

A Ligne bifilaire sans perte.

.1 Loi des mailles :

$$v(x,t) = \Lambda\, dx \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + v(x+dx,t)$$

$$v(x+dx,t) - v(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \cdot dx = -\Lambda\, dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}.$$

$$\boxed{\Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}}$$ ------> (1,5)

Loi des noeuds :

$$i(x,t) = i_c + i(x+dx,t) \; ; \; i_c = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma\, dx \cdot v(x+dx,t)\right).$$

$$i_C = \Gamma dx \cdot \frac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial}{\partial t}\left(v(x,t) + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right).$$

$$= \Gamma dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \Gamma (dx)^2 \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t \partial x}$$; le second terme est négligeable d'ordre 2 en dx.

$$i_C \simeq \Gamma dx \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$$

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = \Gamma dx \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}(x,t)\, dx.$$

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \Gamma \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}}$$ 1

2 $$\begin{cases} -\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{\Lambda} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} & \times \dfrac{\partial}{\partial x} \quad (1) \\ -\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = \Gamma \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} & \times \dfrac{\partial}{\partial t} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 0 = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \Gamma \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0.}$$ 1

de même

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \Lambda \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} & \times \dfrac{\partial}{\partial t} \quad (1)' \\ -\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{\Gamma} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} & \times \dfrac{\partial}{\partial x} \quad (2)' \end{cases}$$

$$(1)' - (2)' \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$ 1

Ce sont des équations de propagation de type D'Alembert. Les solution $v(x,t)$ et $i(x,t)$ sont des fonctions d'onde progressives à la célérité $V = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$ puisque $\frac{1}{\Gamma\Lambda}$ est exprimé en $m^2 s^{-2}$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} \;;\; \Gamma\Lambda = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{\ell}{a}\right)} \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{\ell}{a} = \varepsilon_0 \mu_0$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c.$$ 1

le long de la ligne, le signal électrique se propage à la célérité de la lumière. $V = c$

Solution générale :

$$v(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

superposition de deux ondes progressive.

1 $\underline{v}(x,t) = A \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) + B \exp j\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)$

Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques se propageant dans des sens opposés.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t}.$$

$$\Leftrightarrow \left[-j\frac{\omega}{c} A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + j\frac{\omega}{c} B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)\right] \exp j\omega t = -\Lambda j\omega \underline{i}(x,t)$$ 2

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{i}(x,t) = \left(\frac{1}{c\Lambda} A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - \frac{1}{c\Lambda} B \exp\left(+j\frac{\omega}{c}x\right)\right) \exp j\omega t}$$

2 $$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{V}(x,t)}{\underline{i}(x,t)} = \frac{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + B \exp\left(+j\frac{\omega}{c}x\right)}{\frac{1}{c\Lambda}\left(A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)\right)}$$

$$= c\Lambda \frac{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)}{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)} = Z_c$$

$$\boxed{\underline{Z}(x) = Z_c \frac{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)}{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)}} \; ; \; Z_c = c\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$ 1 + 1.

en Ω.

Z_c représente l'impédance caractéristique de la ligne.

3 La ligne est fermée par une résistance R en $x = 0$

$$v(0,t) = R\, i(0,t) \Rightarrow \frac{v(0,t)}{i(0,t)} = R = \frac{A+B}{A-B}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}}$$ 1,5

le long de la ligne, le signal électrique se propage à la célérité de la lumière. $V = c$ page

Solution générale :

$$v(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

superposition de deux ondes progréssive.

1 $\underline{v}(x,t) = A \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) + B \exp j\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)$

Superposition de deux ondes planes progréssives harmoniques se propageant dans des sens opposés.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t}.$$

$$\Leftrightarrow \left[-j\frac{\omega}{c} A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + j\frac{\omega}{c} B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)\right] \exp j\omega t = -\Lambda j \omega \underline{i}(x,t)$$ 2

$$\Leftrightarrow \underline{i}(x,t) = \left(\frac{1}{c\Lambda} A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - \frac{1}{c\Lambda} B \cdot \exp\left(+j\frac{\omega}{c}x\right)\right) \exp j\omega t$$

2 $$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{V}(x,t)}{\underline{i}(x,t)} = \frac{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + B \exp\left(+j\frac{\omega}{c}x\right)}{\frac{1}{c\Lambda}\left(A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - B \cdot \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)\right)}$$

$$= c\Lambda \frac{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)}{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)} = Z_c$$

$$\underline{Z}(x) = Z_c \frac{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) + B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)}{A \exp\left(-j\frac{\omega}{c}x\right) - B \exp\left(j\frac{\omega}{c}x\right)} \; ; \; Z_c = c\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$ 1 + 1

en Ω.

Z_c représente l'impédance caractéristique de la ligne.

3 La ligne est fermée par une resistance R en $x = 0$

$$V(0,t) = R\, i(0,t) \Rightarrow \frac{V(0,t)}{i(0,t)} = R = \frac{A+B}{A-B}.$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}.$$ 1,5

• Si la ligne est fermée sur l'impédance caractéristique

$\Rightarrow R = Z_c \Rightarrow B = 0$

Seule l'onde incidente se propage le long de la ligne
$\Rightarrow$ le transfert d'énergie à la charge est maximum.
On parle d'adaptation d'impédance.

• Si la ligne est fermée sur un Court_Circuit : $R = 0$
$\Rightarrow B = A$; il apparaît le long de la ligne un système d'ondes stationnaires.
$x = 0$, on a ventre de tension et un noeud d'intensité.

• Si la ligne est en circuit_ouvert en $x = 0$; $R \to \infty$
il vient $B = -A$, il s'établit de même des ondes stationnaires.
En $x = 0$, il y a un ventre d'intensité et un noeud de tension

(1,5)

.4

$R = 1500\,\Omega$

Dans le cas où il n'y a pas réflexion $\Rightarrow R = Z_c$.

$$R = Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = 1500\,\Omega.$$

d'autre par $$c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\,10^8\ m/s$$

(1,5)

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{45}\,10^{-10}\ F/m = 2.22\ pF/m.$$

$$\Lambda = 5\,10^{-6}\ H/m.$$

.1

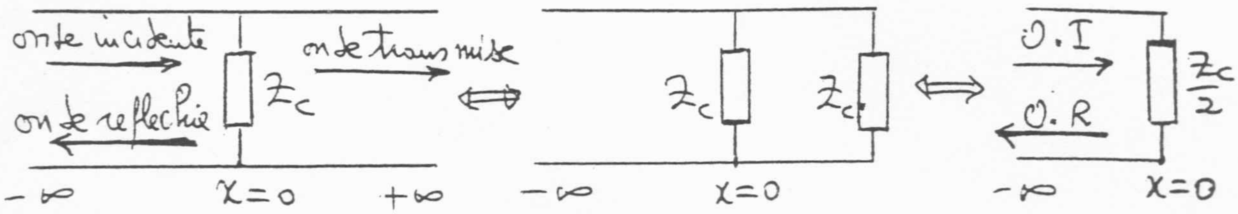
Dans la zône ou $x > 0$, il n'existe qu'une onde transmise ; on a aucune possibilité de la reflexion de l'onde de courant.

$\Rightarrow$ l'impédance de la ligne dans cette region $(x>0)$ est :

$$Z(x) = \frac{V(x,t)}{i(x,t)} = \frac{A \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)}{\frac{A}{C\Lambda} \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)} = C\Lambda = Z_c = \text{cte} \quad \forall\ x > 0.$$

(1)

L'impédance vue en $x=0$ depuis la région $x<0$ est donc équivalente aux deux impédances $R = Z_c$ et Z_c placées en parallèles : $Z_{eq} = Z_c // Z_c = \frac{Z_c}{2}$. pag



1

2. $\underline{V}(x,t) = A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} x) + B \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c} x)$

$\underline{i}(x,t) = \frac{1}{C\Lambda}\left(A \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c}x) - B \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c}x)\right) = \underline{i}^+(x,t) + \underline{i}^-(x,t)$

en $x=0$ $\underline{V}(0,t) = Z_{eq}\, \underline{i}(0,t) = \frac{Z_c}{2}\, \underline{i}(0,t)$.

$\Leftrightarrow (A+B)\exp(j\omega t) = \frac{Z_c}{2} \frac{1}{Z_c}(A-B) \exp j\omega t$ 2

$A + B = \frac{1}{2}(A - B) \Rightarrow -\frac{1}{2} A = \frac{3}{2} B \Rightarrow \frac{B}{A} = -\frac{1}{3}$

$\rho = \left| \frac{\underline{i}^-(x=0,t)}{\underline{i}^+(x=0,t)} \right| = -\frac{B}{A} = \frac{1}{3}$

33% de l'onde incidente (en Courant ou en tension) subit la réflexion.

.B <u>Ligne bifilaire avec perte</u>

10. Loi des mailles :

$v(x,t) = r\, dx\, i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) . \Lambda\, dx + (x+dx,t)$

$v(x+dx,t) - v(x,t) = -r\, dx\, i(x,t) - \Lambda\, dx\, \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

$$\boxed{\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -r\, i(x,t) - \Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}}$$ 1,5

Loi des nœuds : $i(x,t) = i(x+dx,t) + i_r + i_c$.

$i_r = g\, dx\, v(x+dx,t) = g\, dx \left(v(x,t) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\, dx \right)$

$= g\, dx\, v(x,t) + g (dx)^2 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$

On néglige le terme infiniment petit d'ordre en dx.

$$\Rightarrow i_r = g\, dx\, v(x,t).$$

$$i_c = \Gamma dx \frac{\partial}{\partial t}\left(v(x+dx,t)\right) \simeq \Gamma dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

d'où $i(x,t) = i(x+dx,t) + g\, dx\, v(x,t) + \Gamma\, dx \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$.

$$i(x+dx,t) - i(x,t) = \frac{\partial i}{\partial x}(x,t)\,dx = -g\,dx\, v(x,t) + \Gamma dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -g\, v(x,t) - \Gamma \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -r\, i(x,t) - \Lambda \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} & \times \dfrac{\partial}{\partial x} \quad ① \\ \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -g\, v(x,t) - \Gamma \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} & \times \dfrac{\partial}{\partial t} \quad ② \end{cases}$$

$$② - ① \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{r}{\Lambda}\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - g\frac{\partial v}{\partial t} - \Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$-\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{r}{\Lambda}\left(-g\, v(x,t) - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right) - g\frac{\partial v}{\partial t} - \Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - rg\, v(x,t) - r\Gamma\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - g\Lambda\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - (r\Gamma + g\Lambda)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - rg\, v(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{2K}{c}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\Omega^2}{c^2} v(x,t) = 0.$$

$$c^2 = \frac{1}{\Gamma\Lambda} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}} \quad ; \quad \frac{2K}{c} = r\Gamma + g\Lambda$$

$$\Rightarrow K = \frac{c}{2}(r\Gamma + g\Lambda)$$

$$\frac{\Omega^2}{c^2} = rg \Rightarrow \Omega^2 = rgc^2 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{rg}{\Lambda\Gamma}$$

l'équation de propagation obtenue est appelée équation de Télégraphiste.

1. $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x) \exp j\omega t$

on remplace dans l'équation (II), on obtient :

$$\frac{d^2\underline{V}(x)}{dx^2}\exp(j\omega t) - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\underline{V}(x)\exp(j\omega t) - \frac{2K}{c} j\omega \exp(j\omega t)\underline{V}(x) - \frac{\Omega^2}{c^2}\underline{V}(x)\exp(j\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\underline{V}(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2K}{c} j\omega + \frac{\Omega^2}{c^2}\right)\underline{V}(x) = 0$$

En comparant avec l'équation $\frac{d^2\underline{V}(x)}{dx^2} + \underline{k}^2\,\underline{V}(x) = 0$. (3)

on obtient : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2K}{c} j\omega - \frac{\Omega^2}{c^2}$

relation de dispersion

2. $\underline{k}(\omega) = k_1 - j k_2$

l'équation $\frac{d^2V(x)}{dx^2} + \underline{k}^2 V(x) = 0$ a pour solution dans le cas d'un signal progressif :

$$\underline{V}(x) = A\exp(j\underline{k}x) + B\exp(-j\underline{k}x)$$

$$= A\exp j(k_1 - jk_2)x + B\exp -j(k_1 - jk_2)x$$

$$\underline{V}(x) = A\exp(k_2 x)\exp jk_1 x + B\exp(-k_2 x)\exp(jk_1 x)$$

la solution générale d'ondes progressives s'écrit :

$$\underline{v}(x,t) = A\exp(k_2 x)\exp j(\omega t + k_1 x) + B\exp(-k_2 x)\exp j(\omega t - k_1 x)$$

(1.)

Elle représente la somme d'une onde se propageant vers les x décroissants : $A\exp(k_2 x)\exp j(\omega t + k_1 x)$ et d'une onde se propageant suivant les x croissant : $B\exp(-k_2 x)\exp j(\omega t - k_1 x)$

k_2 est lié à l'atténuation (absorption) du signal au cours de la propagation.
k_1 est lié à la vitesse de phase de l'onde.
Le fait que k_1 est une fonction de la pulsation ω traduit le caractère dispersif du milieu de propagation.

3. Les pertes étant faibles ; le terme $\frac{\omega^2}{c^2}$ est prépondérant

$$\underline{k}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2j\omega K}{c} - \frac{\Omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2j\frac{Kc}{\omega}\right).$$

$$\Rightarrow \underline{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2j\frac{Kc}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

on pousse le développement limité de $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

$$\underline{k}(\omega) \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega^2} - \frac{2}{2}j\frac{Kc}{\omega} + \frac{4K^2c^2}{8\,\omega^2}\right)$$

$$= \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\omega^2} - j\frac{Kc}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{K^2c^2}{\omega^2}\right).$$

$$= \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{2}\frac{K^2c^2}{\omega^2}\right) - j\frac{Kc}{\omega}\frac{\omega}{c} = k_1 - jk_2.$$

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{2}\frac{K^2c^2}{\omega^2}\right) \qquad k_2 = K.$$

$$k_2 = K = \frac{c}{2}(r\Gamma + g\Lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}}(r\Gamma + g\Lambda). \quad (3)$$

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\omega^2}rgc^2 + \frac{1}{8}c^4(r\Gamma + g\Lambda)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$= \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2\omega^2}\frac{rg}{\Gamma\Lambda} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma}\right)^2\frac{1}{\omega^2}\right).$$

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda} - \frac{g}{\Gamma}\right)^2\right).$$

$$\boxed{k_1(\omega) = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda} - \frac{g}{\Gamma}\right)^2\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{k_2(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{r\Gamma - g\Lambda}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}\right)}$$

4. $V_\varphi = \frac{\omega}{k_1(\omega)} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\left(1+\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda}-\frac{g}{\Gamma}\right)^2\right)}$

$$\Rightarrow \boxed{V_\varphi = \frac{c}{1+\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda}-\frac{g}{\Gamma}\right)^2}}$$ ①

la vitesse de phase dépend de la pulsation ω.
le milieu est donc dispersif $\Rightarrow$ il y a déformation du signal électrique au cours de sa propagation le long de la ligne.

$k_2 = \frac{1}{2}\left(r\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} + g\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\right) \neq 0$

$\Rightarrow$ la propagation est accompagnée d'une atténuation du signal électrique.
on remarque que V_φ (ligne sans pertes) $> V_\varphi$ (ligne avec pertes)

5. Pour éviter la déformation du signal, V_φ est indépendante de ω

$\Rightarrow \frac{r}{\Lambda} - \frac{g}{\Gamma} = 0 \Rightarrow \boxed{r\Gamma = \Lambda g}$ condition de Heaviside ②

si cette condition est réalisée, l'onde de courant se propage à la célérité $c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}} = V_\varphi$
mais la propagation s'accompagne toujours avec l'atténuation. $k_2 \neq 0$.

6.

6.1 $r\Gamma = 4{,}5.10^{-2} \times 2{,}22\,10^{-12} \simeq 10^{-13}$.

$g\Lambda = 5\,10^{-6} \times 2\,10^{-8} \simeq 10^{-13}$ ①

Condition de Heaviside est vérifiée.

6.2 Pour une onde se propageant suivant les x croissants la fonction d'onde de tension s'écrit

$$v(x,t) = B\exp(-k_2 x)\cos(\omega t - k_1(\omega)x)$$

$B\exp(-k_2 x)$ représente l'amplitude de l'onde qui décroît exponentiellement.

$$k_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda}{\Gamma} g\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} + g\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\right) = g\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

x_0 est la valeur de x pour $B\exp(-k_2 x_0) = \frac{B}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow k_2 x_0 = \ln\sqrt{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\ln\sqrt{2}}{k_2}$$

A.N :

$$k_2 = 2\,10^{-8}\sqrt{\frac{5\times 10^{-6}}{\frac{1}{45}10^{-10}}} = 30\,10^{-8}\,10^{2}\ m^{-1}$$
$$= 3\,10^{-5}\ m^{-1} \quad (1{,}5)$$

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2}\ln 2}{3\,10^{-5}} = 11{,}55\,10^{3}\ m = 11{,}55\ km.$$

La valeur de x_0 montre que l'amortissement de l'onde le long de la ligne téléphonique n'est pas négligeable (0,5)
Ce qui limite les communications urbaines.
Pour augmenter la distance caractéristique de l'atténuation x_0, on intercale régulièrement des bobines d'inductance L le long de la ligne téléphonique

7. Dans ce cas V_φ dépend de ω.

$$V_\varphi = \frac{C}{1+\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda}-\frac{g}{\Gamma}\right)^2} \simeq C\left(1-\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda}-\frac{g}{\Gamma}\right)^2\right)$$

puisque $\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{\Lambda}-\frac{g}{\Gamma}\right)^2 \ll 1$

$(\Lambda\omega \gg r$ et $\Gamma\omega \gg g)$

si ω augmente d'avantage ($f_0 \simeq 1\,MHz$)
on peut négliger le terme $\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{r}{L}-\frac{g}{\Gamma}\right)^2$ devant 1 ①

$\Rightarrow V_\varphi = C$.

dans le cas d'une ligne téléphonique f_0 est en dehors du domaine des fréquences vocales [20 Hz, 20kHz]
une telle valeur de la fréquence ne peut être utile pour les signaux électriques se propageant le long d'une ligne téléphonique. ①

Fin de la Correction